621.39
С50

В. А. СМИРНОВ

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ИСКАЖЕНИЙ В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

3. 5144-66 г.

621.39
С 57

В. А. СМИРНОВ

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ИСКАЖЕНИЙ В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

058661

621.391

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»
МОСКВА 1975

-2013 ПЕРЕВІРЕНО

6Ф2
С50
УДК 621.391.82.001.24

**Смирнов В. А.**

С50 Приближенные методы расчета помехоустойчивости и искажений в системах передачи информации. М., «Связь», 1975.

96 с. с ил.

Описываются приближенные методы расчета помехоустойчивости и искажений в системах связи, позволяющие значительно упростить расчеты и обеспечить достаточную точность. Могут быть оценены шумы на выходе приемников при любых видах модуляции и пороговые значения отношения сигнал/шум на входе приемников.

Книга может быть полезна научным работникам, инженерам и студентам радиотехнических факультетов.

$\frac{30401-069}{045(01)-75}$ 24—75 6Ф2

**Василий Алексеевич Смирнов**

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ИСКАЖЕНИЙ В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ**

Редактор *В. Л. Черняк* Техн. редактор *Т. Ф. Евсенина*
Художник *Е. Н. Волков* Корректор *Л. В. Алексеева*

Сдано в набор 21/I 1975 г. Подп. в печ. 22/IV 1975 г.
Т-08409 Формат 84×108/32 Бумага кн.-журн. 5,04 усл. печ. л. 4,95 уч.-изд. л.
Тираж 7500 экз. Изд. № 15833 Зак. № 21 Цена 42 коп.
Издательство «Связь». Москва 101000, Чистопрудный бульвар, д. 2

Типография издательства «Связь» Госкомиздата СССР
Москва 101000, ул. Кирова, д. 40

© Издательство «Связь», 1975 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Как бы ни велики были возможности современной строгой теории в сочетании с техникой ЭВМ при решении задач передачи информации, практически обоснованное упрощение теории, приводящее к простым методам и формулам для расчетов, никогда не потеряет ценности.

Книга посвящена в основном описанию методов, разработанных автором в течение его многолетней работы в области теории и практики построения систем связи. Некоторые из этих методов применяются относительно широко, например, *метод вероятностных весов*. Однако эти методы были описаны лишь в журнальных статьях и поэтому труднодоступны для широкого круга специалистов. Более того, наиболее известный метод вероятностных весов, предложенный автором еще в 1957 г., только по истечении ряда лет был описан и дополнительно обоснован в [8]. Позднее он был успешно использован также рядом других специалистов [9—14].

В гл. 1 кратко описываются известные математические представления сигналов и помех. Некоторые из приведенных формул и представлений используются в последующих главах. Однако при написании гл. 1 преследовалась цель не только дать некоторое введение к другим, оригинальным главам, но и в не меньшей степени автор хотел показать взаимосвязь различных представлений сигналов и помех, которая обычно не акцентируется в литературе, и роль отдельных представлений в практике. Так, известно, что принципиально канонические разложения — оптимальные, но они в нашей практике почти не используются. Однако отмечается, что разложения в ряды Фурье и вообще разложения по ортогональным функциям в частных случаях, встречающихся в практике, являются каноническими.

В гл. 2 описаны метод вероятностных весов и его применение для оценки помехоустойчивости систем с ЧМ, АМ синусоидального сигнала и систем с импульсной модуляцией.

В гл. 3 описан метод, с помощью которого определяется предельная, потенциальная помехоустойчивость, он

получил название *метода нулевого отклонения.* С его помощью не только легко определяется потенциальная помехоустойчивость систем с различными видами модуляции, но также оцениваются искажения при многолучевом приеме.

В гл. 4 показано, как можно использовать обобщенное соотношение Шеннона, определяющее предельную пропускную способность канала для определения пороговых уровней различных систем передачи информации и максимального выигрыша в помехоустойчивости.

Автор выражает глубокую благодарность д-ру техн. наук профессору Бородичу С. В. за просмотр рукописи и ценные замечания.

Автор надеется, что книга будет полезна как для научных работников и инженеров, разрабатывающих и эксплуатирующих аппаратуру связи, так и для студентов в процессе изучения ими довольно сложных вопросов передачи информации.

Предложения и пожелания следует направлять в издательство «Связь»: 101000, Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2.

Автор

# ГЛАВА 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ, ПОСТУПАЮЩИХ НА ВХОД ПРИЕМНИКА

## 1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИГНАЛАХ И ПОМЕХАХ

Практика теоретического решения задач по помехоустойчивости и искажениям в системах передачи информации показывает, что простота решения существенно зависит от того, какие математические представления отображают сигналы и помехи[1]. Для различных задач могут оказаться приемлемыми те или иные представления. Приведем сведения о наиболее распространенных представлениях, некоторые из них далее применяются в описываемых методах расчета.

Сигналы делятся на детерминированные (или регулярные) и случайные (нерегулярные). В подавляющем большинстве случаев сигналы, передаваемые по системам связи, случайны. Объясняется это, прежде всего, тем, что обычно сигналы несут информацию или сообщения, являющиеся чаще всего случайными функциями времени (телеграфные сообщения, речь, музыка, телевизионное изображение и др.). Кроме того, случайный характер радиосигналов обусловливается иногда также нерегулярными условиями их распространения по каналам связи, например, через атмосферу и др. Таким образом, по терминологии теории вероятностей реальные сигналы представляют собой обычно случайные процессы.

К случайным же процессам относится и большинство помех. Таким образом, принципиального различия между случайными сигналами и помехами нет. Поэтому нет принципиального различия в математическом представлении сигналов и помех. Практическое различие заключается в различных законах распределения вероятностей, а иногда лишь в числовых характеристиках (моментах распределений).

---

[1] Также используют термины «полезный сигнал» и «сигнал помехи». Для сокращения мы используем термины «сигнал» и «помеха» соответственно.

Случайные сигналы и помехи могут быть описаны действительной, иногда сложной по виду функцией времени $X(t)$. Если такая функция известна, то иногда такого представления достаточно для решения задачи. Однако в других случаях задача бывает столь сложна, что ее возможно решить лишь для простого сигнала. В этом случае прибегают к разложению функции $X(t)$ на конечную или бесконечную сумму *элементарных случайных функций* в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t). \qquad (1.1)$$

Таким образом, элементарной случайной функцией называют функцию

$$X_i(t) = V_i \varphi_i(t), \qquad (1.2)$$

где $V_i$ — случайная величина, математическое ожидание которой равно нулю; $\varphi_i(t)$ — неслучайная, регулярная функция, которую называют координатной. Как видно, элементарность функции заключается в том, что случайным в ней является только множитель $V_i$, не зависящий от времени, а зависимость от времени, отображаемая функцией $\varphi_i(t)$, случайной не является. Примерами элементарных случайных функций могут быть, в частности, функции вида

$$X_i(t) = V_i \sin \omega_i t, \quad X_i(t) = V_i e^{i\omega_i t},$$
$$X_i(t) = V_i \sigma(t - \tau_i),$$

где $\sigma(t)$ — единичная функция и др.

Разложение вида (1.1) бывает особенно полезно тогда, когда при рассмотрении того или иного преобразования сигнала возможно применить принцип суперпозиции. Принципиально это возможно при любых линейных преобразованиях. Однако в отдельных случаях такое разложение может быть полезным и при нелинейных преобразованиях.

Можно доказать, что разложение вида (1.1) можно произвести, используя различного вида функции $\varphi_i(t)$ при соответственно различных коэффициентах $V_i$.

Возникает вопрос о получении оптимального разложения в том смысле, чтобы решение поставленной задачи при таком разложении было максимально простым и об-

ладало наибольшей физической наглядностью. Такое разложение будет, очевидно, и оптимальным представлением сигнала и помехи.

## 1.2. КАНОНИЧЕСКИЕ (ОПТИМАЛЬНЫЕ) ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

*Общие сведения о каноническом (оптимальном) разложении.* В процессе решения задач по помехоустойчивости и искажениям, в первую очередь, приходится определять первые моменты случайных функций (или величин), т. е. математическое ожидание (среднее значение), дисперсию и корреляционные моменты. Разложение (1.1), по-видимому, можно считать оптимальным, если вычисление этих моментов несложно. Посмотрим, чем, в первую очередь, будет определяться легкость расчета указанных моментов.

Из теории вероятностей легко найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, заданной разложением (1.1):

$$K_x(t,\ t') = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\,\varphi_i(t')\,D_i + \sum_{i\neq j} \varphi_i(t)\,\varphi_j(t')\,K_{ij}. \tag{1.3}$$

Полагая в этом соотношении $t=t'$, получим дисперсию случайной функции $X(t)$:

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t)\,D_i + \sum_{i=j} \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,K_{ij}. \tag{1.4}$$

В этих выражениях $D_i$ — дисперсия случайной величины; $\sum_i$ и $K_{ij}$ — корреляционный момент случайных величин $V_i$ и $V_j$.

Очевидно, выражения (1.3) и (1.4) значительно упрощаются, если все коэффициенты $V_i$ разложения (1.1) некоррелированны, т. е. все $K_{ij}=0$ при $i\neq j$. В этом случае разложение (1.1) называют *каноническим.* Его обычно записывают в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i\,\varphi_i(t). \tag{1.5}$$

Такой вид разложения получается, если ввести центрированную случайную функцию $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$. Тогда $\overset{\circ}{X}(t) = m_x(t) + X(t)$, и, следовательно, сумма в (1.5) есть разложение в ряд функции $\overset{\circ}{X}(t)$. Удобство в использовании разложения вида (1.5) заключается в том, что в нем коэффициенты $V_1$, $V_2$, ..., $V_n$ представляют систему некоррелированных случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю.

Таким образом, для канонического разложения, поскольку все $K_{ij}=0$, соотношения (1.3) и (1.4) примут вид

$$K_x(t,\ t') = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\,\varphi_i(t')\,D_i, \tag{1.6}$$

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t)\,D_i. \tag{1.7}$$

Убедимся, насколько упрощается расчет моментов при каноническом разложении. Действительно, допустим, что разложение (1.1) содержит сумму из десяти слагаемых ($n=10$). Если это разложение не каноническое, то для вычисления $K_x(t, t')$ и $D_x(t)$ по (1.3) и (1.4) требуется вычислить сто слагаемых, в то время как при каноническом разложении требуется вычислить лишь десять слагаемых. Преимущество канонического разложения становится все более очевидным с увеличением числа слагаемых в сумме.

Зная каноническое разложение (1.5), легко найти по ф-ле (1.6) и (1.7) разложения для $K_x(t, t')$ и $D_x(t)$. Можно доказать и обратное положение: зная каноническое разложение корреляционной функции (1.6), можно найти каноническое разложение функции $X(t)$.

Канонические разложения применяются не только для действительных случайных функций, но и для комплексных. Доказывается, что, если в (1.5) величины $V_i$ — некоррелированные комплексные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, а $m_x^{\circ}(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ — комплексные неслучайные функции, тогда

$$K_x(t,\ t') = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\,\overline{\varphi_i(t')}\,D_i, \tag{1.8}$$

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(t)|^2 D_i. \tag{1.9}$$

В этих соотношениях $\overline{\varphi_i(t)}$ — сопряженная функция от $\varphi_i(t)$; $|\varphi_i(t)|$ — модуль функции $\varphi_i(t)$.

Число членов канонического разложения случайной функции может быть конечным и бесконечным. Существуют интегральные канонические представления случайных функций, в которых сумма заменяется интегралом.

Центральной задачей канонического разложения является выбор координатных функций $\varphi_i(t)$ и коэффициентов $V_i$, удовлетворяющих такому разложению. Для такого выбора существует ряд приемов [6, 17, 18].

*Каноническое разложение стационарной случайной функции.* Пусть $X(t)$ отображает стационарную случайную функцию. Возьмем достаточно большой интервал наблюдения этой функции — $T$. Пусть задана корреляционная функция $\overset{\circ}{X}(t)$ $K_x(t, t+\tau)=K_x(\tau)$. Известно, что $K_x(\tau)$ — функция четная и отображается обычно симметричной кривой.

При изменении $t$ и $t'$ от 0 до $T$ аргумент $\tau=t'-t$ изменяется от $-T$ до $T$. Такую функцию можно разложить в ряд Фурье по косинусам, т. е.

$$K_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos n\,\omega_0\tau, \tag{1.10}$$

где $\omega=2\pi/2T=\pi/t$, откуда $f_0=1/2T$. Коэффициенты $D_n$ определяются формулами

$$D_0 = \frac{1}{T}\int_0^T K_x(\tau)\,d\tau,$$

$$D_n = \frac{2}{T}\int_0^T K_x(\tau)\cos n\omega_0\tau\,d\tau. \qquad (1.11)$$

Подставив в (1.10) вместо $\tau$ его значение $t'-t$, получим

$$K_x(t,\ t') = \sum_{n=0}^{\infty}(D_n\cos n\omega_0 t'\cos n\omega_0 t + D_n\sin n\omega_0 t'\sin n\omega_0 t). \qquad (1.12)$$

Сравнивая (1.12) с (1.6), видим, что (1.12) есть не что иное, как каноническое разложение корреляционной функции $K_x(t, t')$. Координатными неслучайными функциями этого разложения являются косинусы и синусы частот, кратных $\omega_0$. Учитывая, что согласно (1.5) и (1.6) такие же координатные функции будут и при разложении $\overset{\circ}{X}(t)$, получим каноническое разложение центрированной стационарной случайной функции в виде

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(U_n\cos n\omega_0 t + V_n\sin n\omega_0 t), \qquad (1.13)$$

где $U_n$ и $V_n$ — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, одинаковыми для каждой пары случайных величин с одним и тем же индексом $n$, определяемыми из (1.11).

Полученное разложение (1.13) в общем случае не является рядом Фурье для функции $\overset{\circ}{X}(t)$ в интервале $(-T, T)$. Действительно, координатные функции $\sin n\omega_0 t$ и $\cos n\omega_0 t$ имеют частоты $nf_0 = n/2T = 1/2T,\ 1/T,\ 3/2T,\ 2/T,\ 5/2T$ ...

Только при условии отсутствия в разложении функции корреляции (1.10) нечетных гармоник в разложении (1.13) останутся только гармоники периода $2T$, т. е. частоты $nf_0 = 1/2T,\ 1/T,\ 2/T,\ 4/T$ ..., и тогда разложение (1.13) будет рядом Фурье. Разложение (1.13) есть фактически разложение в тригонометрический ряд, в котором амплитуды гармоник являются случайными величинами, и является таким образом *спектральным разложением.*

Из (1.13) найдем, что

$$D_x = D[\overset{\circ}{X}(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} D_n, \qquad (1.14)$$

т. е. *дисперсия стационарной случайной функции равна сумме дисперсий всех гармоник ее спектрального разложения.*

Если $T\to\infty$, придем от дискретного к непрерывному спектру с плотностью $G(\omega)$ и к известным интегральным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau, \\ K(\tau) &= \int_0^\infty G(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

Плотность спектра частот в герцах

$$G(f) = 2\pi G(\omega), \qquad (1.16)$$

и тогда ф-лы (1.15) заменяются следующими:

$$\left.\begin{aligned} G(f) &= 4\int_0^\infty K(\tau)\cos(2\pi f\tau)\, d\tau, \\ K(\tau) &= \int_0^\infty G(f)\cos(2\pi f\tau)\, df. \end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

Эти формулы иногда полезны в комплексном виде:

$$\left.\begin{aligned} G(f) &= 2\int_{-\infty}^\infty K(\tau)\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau, \\ K(\tau) &= 0{,}5\int_{-\infty}^\infty G(f)\, e^{i2\pi f\tau}\, df. \end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

Для расчетов обычно также требуется знание законов распределения вероятностей величин $U_n$ и $V_n$. Доказано, что для нормальной случайной функции $X(t)$ законы распределения для $U_n$ и $V_n$ тоже нормальные. Их средние значения равны нулю и они некоррелированны. При задании других условий, а не функции корреляции (1.10) способы нахождения канонического разложения усложняются, однако они разработаны. Подробно вопросы канонических разложений изложены в [6, 17, 18].

## 1.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ РЯДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Разложение вида (1.1) может быть выполнено по-другому, и тогда оно не будет каноническим и, следовательно, не будет обладать свойствами канонического разложения. Однако в любом разложении вида (1.1) функции $\varphi_i(t)$ должны, очевидно, удовлетворять следующим условиям:

— ряд вида (1.1) должен быть сходящимся;

— функции $\varphi_i(t)$ должны легко вычислятья;

— эти функции должны иметь конечную полосу частот, поскольку реальные сигналы $X(t)$ обычно ограничены некоторой полосой частот.

Указанным условиям наиболее полно удовлетворяет совокупность ортогональных функций. Поэтому разложение вида (1.1), в ко-

тором $\varphi_i(t)$ являются ортогональными функциями, наиболее широко используется в практике.

Ортогональными называются функции, взятые в интервале $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$, если они обеспечивают соотношение

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{1.19}$$

Интеграл от квадрата каждой функции, т. е. интеграл (1.19) при $i=j$, равен постоянной величине

$$\int_{T/2}^{T/2} \varphi_i^2(t)\,dt = C_i^2 . \tag{1.20}$$

Если взять семейство функций

$$\psi_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{C_1}, \quad \psi_2(t) = \frac{\varphi_2(t)}{C_2}, \quad \ldots, \psi_n(t) = \frac{\varphi_n(t)}{C_n},$$

то в силу (1.19) и (1.20) эти функции будут удовлетворять условию

$$\int_{-T/2}^{T/2} \psi_i(t)\,\psi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{1.21}$$

Такие функции называются *ортонормированными* (т. е. ортогональными и нормированными).

Если функция $X(t)$ не является случайной, тогда, задавшись функцией $\varphi_i(t)$, нетрудно найти коэффициенты разложения $V_j$, для чего умножим обе части соотношения (1.1) на $\varphi_j(t)$ и проинтегрируем в пределах $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} X(t)\,\varphi_j(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} V_i \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt.$$

Согласно (1.19) и (1.20) интеграл в правой части будет не равен нулю только при $i=j$, откуда, с учетом (1.20),

$$V_j = \frac{1}{C_j^2} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)\,\varphi_j(t)\,dt. \tag{1.22}$$

Теория показывает, что аппроксимация $X(t)$ рядом из ортогональных функций тем точнее, чем больше берется членов ряда. Точная аппроксимация будет при $n=\infty$:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i\,\varphi_i(t). \tag{1.23}$$

Такой ряд называют *обобщенным рядом Фурье*.

Существует ряд видов ортогональных функций, и принципиально любым видом можно воспользоваться для получения ряда (1.1). Представление сигнала $X(t)$ различными ортогональными функциями аналогично представлению вектора в различных системах координат.

Примерами ортогональных функций могут служить тригонометрические функции, комплексные экспоненциальные функции, функции вида $\sin x/x$, полиномы Лежандра и Якоби и др.

Если функция $X(t)$ — случайная, тогда определение коэффициентов $V_i$ возможно только в вероятностном смысле, т. е. возможно определение числовых характеристик случайной величины $V_i$. Этого обычно бывает достаточно при решении многих задач. Для этого необходимо знать вероятностные характеристики функции $X(t)$. Действительно, найдем, например, корреляционный момент $V_j$, если известна $K_x(t_1, t_2)$. Воспользовавшись (1.22), получим

$$K_{ij} = M[V_i V_j] = M\left[\frac{1}{C_i^2 C_j^2}\int_{-T/2}^{T/2} X(t_1)\,\varphi_i(t_1)\,dt_1 \times\right.$$

$$\left.\times \int_{-T/2}^{T/2} X(t_2)\,\varphi_j(t_2)\,dt_2\right] = \frac{1}{C_i^2 C_j^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} M[X(t_1)X(t_2)]\,\varphi_i(t_1)\times$$

$$\times \varphi_j(t_2)\,dt_1 dt_2 = \frac{1}{C_i^2 C_j^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} K_x(t_1, t_2)\,\varphi_i(t_1)\,\varphi_j(t_2)\,dt_1 dt_2. \quad (1.24)$$

Приняв в (1.24) $i=j$, получим среднеквадратичное значение $M[V_i^2]$ или $M[V_j^2]$.

Разложение случайной функции $X(t)$ по ортогональным функциям совпадает с каноническим разложением при условии, что $X(t)$ подчиняется нормальному закону распределения. В этом легко убедиться из (1.24). Так, пусть $X(t)$ отображает нормальный белый шум. Его корреляционная функция

$$K_x(t_1, t_2) = K(\tau) = G_0\,\delta(\tau), \quad (1.25)$$

что легко следует из (1.17), если учесть, что плотность его энергетического спектра $G(f) = G_0$. Подставив это значение в (1.24), получим

$$K_{ij} = \frac{G_0}{C_i^2 C_j^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_i(t)\,\varphi_j(t+\tau)\,\delta(\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{G}{C_i^2 C_j^2}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt.$$

В силу ортогональности функций интеграл при $i \neq j$ равен нулю, т. е. корреляционный момент $K_{ij}=0$, что и требовалось доказать.

*Разложение и теорема Котельникова.* Рассмотрим одно важное свойство случайных сигналов, обладающих ограниченным спектром, и приведем их условно-аналитическое представление через последовательность равноотстоящих мгновенных значений сигнала. Такое представление носит название ряда Котельникова.

Теорема, которую доказал В. А. Котельников для таких сигналов, следующая: *«любая реализация случайного сигнала $X(t)$ со спектром, находящимся в интервале $(0, F_m)$, полностью определяет-*

*ся последовательностью его частных значений в точках, отстоящих на* $\Delta t = 1/2F_m$ *секунд друг от друга».*

Аналитическое выражение функции $X(t)$ через ее частные значения может быть записано в виде[1]

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta t)\,\frac{\sin 2\pi F_m (t - k\Delta t)}{2\pi F_m (t - k\Delta t)}\,. \qquad (1.26)$$

$(k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots)$

Если функция $X(t)$ ограничена во времени интервалом $T$, то практически считают, что она определяется заданием $n = T\ (1/2\ F_m) = 2TF_m$ ее значений в дискретных точках, отстоящих друг от друга на одинаковых расстояниях. Мы подчеркнули слово *практически*, так как строго теоретически подобное утверждение неверно. Действительно, согласно интегральным преобразованиям Фурье, если сигнал ограничен по спектру, то он имеет бесконечную длительность, и, наоборот, сигнал, ограниченный во времени, имеет неограниченный спектр. Практически реальные сигналы имеют относительно бо́льшую длительность $T$ и число $n = T/\Delta t$ очень велико. В этом случае почти вся энергия сигнала сосредоточена в интервале времени $T$ и соответственно практически в ограниченном спектре. С учетом этого формулу $n = 2TF_m$ можно считать практически верной.

Для сигнала, спектр которого лежит в полосе частот $\omega = F_2 - F_1$, теорема Котельникова остается справедливой, и необходимое число дискретных значений в этом случае равно $n = 2\omega T$.

Как было отмечено ранее, функции вида $\sin x/x$, входящие в (1.26), являются ортогональными, что нетрудно доказать. Таким образом, подобное разложение есть разложение по ортогональным функциям. Как показано в [20], это разложение можно рассматривать также и как каноническое, когда расстояние между отсчетами не менее интервала корреляции.

Теорема Котельникова лежит в основе дискретизации непрерывных сигналов, которая используется в системах связи с импульсной модуляцией.

## 1.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Реальные сигналы описываются действительными функциями времени. Однако при решении многих задач удобно записывать сигнал в виде комплексной функции времени или в виде ряда, состоящего из суммы элементарных комплексных функций. Например, ряд Фурье в виде суммы элементарных действительных функций

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

[1] Получение этого выражения и простое доказательство теоремы Котельникова имеется, например, в [2, 19, 20] и др.

часто записывают в комплексном виде:

$$X(t) = 0{,}5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n e^{in\omega_0 t},$$

где $\dot{X}_n = X_n e^{-i\varphi_n}$ — комплексная амплитуда $X_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} X(t) e^{-in\omega_0 t} dt$, если функция $X(t)$ задана и периодическая с периодом $T_0$. Такое представление с помощью комплексных функций является, однако, лишь частным случаем представления сигнала *аналитической функцией.*

Точное математическое определение аналитической функции таково: «*функция комплексного переменного* $z = x + iy$; $f(z) = u + iv$, *образованная сопряженными гармоническими функциями* $u(x, y)$ и $v(x, y)$ *в области* $O$, *называется аналитической в этой области*».

Под сопряженными гармоническими функциями в области $O_1 \leqslant O$ называются функции, для которых выняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.27}$$

В радиоэлектронике чаще всего используются функции времени

$$X(t) = u(t) + i\,v(t). \tag{1.28}$$

Если функция $X(t)$ является пределом аналитической функции $X(t + i\alpha)$ при $\alpha \to 0$, то доказывается, что функции $u(t)$ и $v(t)$ сопряжены по Гильберту, т. е.

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau)}{\tau - t} d\tau, \\ v(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Доказывается и обратное, что если для составляющих функции (1.28) соблюдаются преобразования Гильберта, то выполняются и условия Коши-Римана и, следовательно, функция $f(t)$ или $X(t)$ аналитическая.

Отметим, что при выполнении преобразований Гильберта интегралы вычисляются как предел:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \lim_{\alpha \to 0} \left[ \int_{-\infty}^{\tau-\alpha} \frac{u(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_{\tau+\alpha}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \right]. \qquad (1.30)$$

Сигнал (1.28) можно записать в виде

$$X(t) = U(t)\, e^{i\Phi(t)}, \qquad (1.31)$$

где

$$U(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)} \qquad (1.32)$$

носит название огибающей и

$$\Phi(t) = \operatorname{arctg} v(t)/u(t) \qquad (1.33)$$

фазы колебаний.

К числу аналитических функций принадлежит большинство элементарных функций: многочлены, тригонометрические функции, показательная функция, цилиндрические функции и другие, аргумент $z$ может быть при этом некомплексным. Однако при комплексном $z$ аналитическая функция должна соответствовать приведенному выше определению.

Понятие аналитического сигнала и полученные соотношения применимы как к детерминированным, так и к случайным стационарным сигналам.

Случайный процесс на основании (1.31) можно представить в виде

$$X(t) = U(t)\cos\Phi(t) + i\, U(t)\sin\Phi(t). \qquad (1.34)$$

Действительная его часть дает реальный сигнал

$$(t) = U(t)\cos\Phi(t). \qquad (1.35)$$

При анализе радиосигналов, являющихся обычно узкополосными процессами, фазу $\Phi(t)$ после выделения линейного детерминированного члена можно представить в виде

$$\Phi(t) = \omega_0 t - \Theta(t), \qquad (1.36)$$

и тогда сигнал (1.35) можно записать:

$$x(t) = U(t)\cos[\omega_0 t - \Theta(t)] = U(t)\cos\Theta\cos\omega_0 t + \\ + U(t)\sin\theta\sin\omega_0 t. \qquad (1.37$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= U(t)\cos\Theta, \\ B(t) &= U(t)\sin\Theta, \end{aligned}\right\}$$

перепишем (1.37) в виде

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\sin\omega_0 t. \tag{1.38}$$

В комплексном виде такой узкополосный сигнал в соответствии с (1.31) будет

$$X(t) = U(t)\,e^{i[\omega_0 t - \theta(t)]}. \tag{1.39}$$

Частоту $\omega_0$ можно, в принципе, взять любой, но обычно ее берут равной несущей частоте радиосигнала.

Изучение свойств случайного узкополосного стационарного сигнала приводит к следующим результатам:

а) $U(t)$ и $\Theta(t)$ являются медленно изменяющимися по сравнению с $\cos\omega_0 t$ функциями времени;

б) огибающая $U(t)$ распределена по закону Рэлея, а фаза $\Theta(t)$ — по равномерному закону при условии, что $x(t)$ распределен нормально, т. е.

$$p(U) = \frac{U}{\sigma^2}\,e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}},\ (U > 0),$$
$$p(\Theta) = 1/2\pi,\ (-\pi < \Theta < \pi); \tag{1.40}$$

в) составляющие $A(t)$ и $B(t)$ имеют нормальное распределение и независимы;

г) корреляционные функции процессов $A(t)$ и $B(t)$ равны, следовательно, одинаковы их спектры;

д) $U(t)$ и $\Theta(t)$ независимы.

Подробные сведения о свойствах аналитических сигналов, огибающей и фазы можно найти в [1, 3, 21, 22 и др.].

## 1.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Используя представление сигналов в комплексном аналитическом виде, можно существенно упростить расчеты корреляционных функций и спектров.

Легко убедиться, что всякое модулированное колебание в комплексном виде можно представить в виде произведения двух функций:

$$\dot{u}(t) = \dot{M}(t)\,\dot{U}_c(t), \tag{1.41}$$

где $\dot{U}_c(t)$ — функция, описывающая несущее колебание, а $\dot{M}(t)$ — модулирующая функция, выражающая воздействие передаваемого сообщения $U(t)$ на несущее колеба-

ние. Очевидно, что функции $\dot{M}(t)$ и $\dot{U}_c(t)$ взаимно независимы, поэтому справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\langle \dot{u}(t)\rangle = \langle \dot{M}(t)\rangle \cdot \langle \dot{U}_c(t)\rangle, \\ &K_u(\tau) = K_м(\tau)\, K_{U_c}(\tau), \\ &G_u(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_м(\nu)\, G_{U_c}(\omega - \nu)\, d\nu. \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

Приведем более подробную запись трех аналоговых видов модуляции синусоидальной несущей:

$$\left.\begin{aligned} &\text{АМ} - u(t) = U_c[1 + MU(t)]\, e^{i\omega_0 t}, \\ &\text{ФМ} - u(t) = U_c\, e^{i\Delta\varphi U(t)}\, e^{i\omega_0 t}, \\ &\text{ЧМ} - u(t) = U_c\, e^{i\Delta\omega_m \int\limits_0^t U(t')\, dt'}\, e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

При этой записи предполагается, что модулирующие сообщения обозначены:

$$\left.\begin{aligned} &\text{АМ} - S(t) = \Delta U U(t), \\ &\text{МФ} - S(t) = \Delta\varphi\, U(t), \\ &\text{ЧМ} - S(t) = \Delta\omega_m \int\limits_0^t U(t')\, dt' \end{aligned}\right\} \tag{1.44}$$

и $M = \Delta U / U_c$; $U(t)$ предполагается в общем случае случайной функцией, значения которой не выходят за пределы

$$-1 \leqslant U(t) \leqslant 1 \tag{1.45}$$

с вероятностью, близкой к единице.

### 1.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СМЕСИ МОДУЛИРОВАННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА И ШУМА НА ВХОДЕ ПРИЕМНИКА

В соответствии с (1.41) синусоидальный модулированный сигнал

$$u_c(t) = U_c M(t)\, e^{i\omega_0 t}, \tag{1.46}$$

где $U_c$ — амплитуда синусоидального немодулированного несущего колебания.

058661

Шум (помеху) в соответствии с (1.39) запишем

$$u(t) = U_{ш}(t)\, e^{i\,[\omega_0 t - \theta_{ш}(t)]}. \qquad (1.47)$$

Суммарное напряжение на входе приемника будет

$$u(t) = u_c(t) + u_{ш}(t) = U_c[M(t) + \kappa_{ш}\, e^{-i\theta_{ш}}]\, e^{i\omega_0 t}, \qquad (1.48)$$

где

$$\kappa_{ш} = \kappa_{ш}(t) = U_{ш}(t)/U_c. \qquad (1.49)$$

Результат детектирования определяется суммарной модулирующей функцией, заключенной в квадратные скобки в (1.48). Для разных видов модуляции эта функция будет выражаться по-разному. Зная ее, можно вычислить сумму сообщения и шума на выходе приемника. В общем случае этот сигнал на выходе будет случайной функцией времени $t$, $\kappa_{ш}$ и $\Theta_{ш}$:

$$u_{вых} = f(t,\ \kappa_{ш}\Theta_{ш}). \qquad (1.50)$$

# ГЛАВА 2. МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНЫХ ВЕСОВ

## 2.1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА

Имея выражение для суммы модулированного сигнала и помехи (1.50) в виде случайной функции аргументов $t$, $\kappa_{ш}$ и $\Theta_{ш}$, можно найти корреляционную функцию от этой функции, затем энергетический спектр и мощности сообщения и помехи на выходе приемника.

Однако практически почти всегда найти в общем виде строгое и точное решение задачи помехоустойчивости не удается или удается с большими трудностями и отсутствием ясной физической картины взаимозависимостей между параметрами аппаратуры и сигналами. Поэтому применяют упрощенные методы решения и ищут общее решение, но для частных случаев, например, решают задачу в предположении, что помеха очень мала по сравнению с сигналом.

Решение задачи при таком предположении имеет существенное практическое значение, но не может полностью удовлетворить практике, так как во многих случаях современные системы передачи информации должны работать в условиях сравнительно больших помех. Одним из упрощенных методов решения задачи помехоустойчивости является метод, получивший название «метода вероятностных весов», который был предложен автором еще в 1957 г. Ценной особенностью метода является то, что задача решается при любом отношении сигнал/помеха на входе приемника и поэтому возможно определить пороговое значение этого отношения в системах с таким порогом. В настоящей главе излагается суть этого метода и на ряде примеров демонстрируется его применение.

Суть метода элементарно проста и основана на использовании идеи статистического усреднения. Пусть имеется функция $f(x)$ от случайной величины $x$. Ее математическое ожидание (среднее значение)

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx, \tag{2.1}$$

где $p(x)$ — плотность распределения вероятности случайной величины $x$. Если функция $f(x)$ очень сложная, то точное вычисление интеграла может оказаться невыполнимым в явном виде. Тогда возможно применение разного рода приближенных методов. Возможен, в частности, такой метод. Интервал интегрирования разбиваем на участки:

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,p(x)\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\,p(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{q}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx. \tag{2.2}$$

В отдельных взятых интервалах функция $f(x)$ может быть выражена более просто, например, в виде сходящегося ряда, отрезка прямой линии и другого, и тогда частные интегралы в (2.2) могут быть легко вычислены. Простота и точность расчета по такому методу зависят, естественно, от выбора частных интервалов и аппроксимаций для $f(x)$ в этих интервалах.

В интересующем нас случае необходимо найти спектр функции $f(t, \kappa_ш, \Theta_ш)$. Во многих случаях найти этот спектр для произвольного значения $\kappa_ш$ и в интервале $0<\kappa_ш<\infty$ не удается из-за сложности функции $f(t, \kappa_ш, \theta_ш)$. Поэтому оказалось удобным весь участок изменения $\kappa_ш$ разбить на два:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 0<\kappa_ш<1; \\ 2)\ 1<\kappa_ш<\infty. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Первый участок соответствует случаю, как это следует из определения $\kappa_ш$ (1.49), когда пиковое значение огибающей шума (помехи) $U_ш$ меньше амплитуды сигнала $U_c$. Второй участок соответствует условию, когда $U_ш>U_c$. Эти два случая можно условно называть случаями *малого* и *большого шумов* соответственно.

В ряде случаев для функции $f(t, \kappa_ш, \Theta_ш)$ оказывается возможным получить в этих интервалах более простые аппроксимирующие функции:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t, \kappa_ш, \Theta_ш) \text{ для } \kappa_ш<1, \\ f_2(t, \kappa_ш, \Theta_ш) \text{ для } \kappa_ш>1. \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Вычислить спектры этих функций может оказаться легче. Так как в процессе передачи информации случайная величина $\kappa_ш$ все время изменяется, то будет переменным и спектр. Естественно получить усредненный по $\kappa_ш$ спектр. Если энергетический спектр функции $f_1(t, \kappa_ш, \Theta_ш) - G_{\kappa_ш<1}(\omega)$, а функции $f_2(t, \kappa_ш, \Theta_ш) - G_{\kappa_ш>1}(\omega)$, тогда усредненный спектр будет

$$<G(\omega)> = G_{\kappa_ш<1}(\omega) P(\kappa_ш < 1) + G_{\kappa_ш>1}(\omega) P(\kappa_ш > 1), \quad (2.5)$$

где $P(\kappa_ш<1)$ — вероятность того, что $\kappa_ш<1$, а $P(\kappa_ш>1)$ — вероятность того, что $\kappa_ш>1$.

Соотношение (2.5) является важнейшим соотношением метода вероятностных весов. В общий же процесс расчета по этому методу входят нахождение функций $f_1$ и $f_2$ в (2.4), вычисление спектров этих функций $G_{\kappa_ш<1}(\omega)$ и $G_{\kappa_ш>1}(\omega)$, определение вероятностей $P(\kappa_ш<1)$ и $P(\kappa_ш>1)$ и подсчет среднего спектра по (2.5).

Очевидно, что чем точнее определены спектры для функций $f_1$ и $f_2$, тем точнее получится и окончательный результат для $<G(\omega)>$. Тем не менее применительно к определению спектра для системы связи с ЧМ (частотной модуляцией) в [14] предложено максимальное упрощение, сводящееся к тому, что в $G_{\kappa_ш<1}(\omega)$ учитывается только спектр сигнала, без учета шума, а в $G_{\kappa_ш>1}(\omega)$ учитывается только шум. Несмотря на такое грубое упрощение, полученное в работе окончательное значение для $<G(\omega)>$ по ф-ле (2.5) оказалось близким к экспериментальным данным и к спектру, вычисляемому по методу «фазового скачка» Райса (см. [16]).

Усреднение по $\kappa_ш$, по-видимому, можно производить на разных этапах вычисления: например, при вычислении корреляционной функции, а также при вычислении мощностей сообщения и помехи на выходе приемника. В последнем случае

$$P_\Sigma = P_{\kappa_ш<1} P(\kappa_ш < 1) + P_{\kappa_ш>1} P(\kappa_ш > 1), \quad (2.6)$$

где $P_\Sigma$ — общая мощность сообщения и помехи; $P_{\kappa_ш<1}$ — мощность сообщения и помехи для случая $\kappa_ш<1$; $P_{\kappa_ш>1}$ — то же, при $\kappa_ш>1$.

В описанном здесь методе вероятностных весов в качестве случайного параметра, по которому проводится усреднение, взят $\kappa_ш$. Однако в качестве такого парамет-

ра могут быть взяты и другие случайные величины, определяющие процесс. Далее, в § 2.4, посвященном анализу помехоустойчивости импульсных систем связи, мы столкнемся со случаем, когда усреднение вида (2.5) или (2.6) делается по другому параметру. Аналогичный случай встречается также при рассмотрении помехоустойчивости демодулятора с ОСЧ (обратной связью по частоте) [11].

Метод вероятностных весов применялся рядом авторов в основном при анализе помехоустойчивости систем связи с различными вариантами ЧМ.

Здесь также показано его применение в системах с ЧМ, но выполненное более строго, а также и применение метода при других системах модуляции.

## 2.2. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПОМЕХ В СИСТЕМЕ С ЧМ

Изложим решение «методом вероятностных весов» классической задачи — определение сигнала и шума на выходе обычного ЧМ приемника при ЧМ синусоидальной несущей широкополосным многоканальным сообщением. Такая модуляция и прием наиболее типичны для многоканальных радиорелейных систем связи, работающих в дециметровом и сантиметровом диапазонах волн в пределах прямой видимости. В тропосферных системах радиорелейной связи часто применяют ЧМ модуляцию с ОСЧ на приеме.

Для облегчения анализа помехоустойчивости обычной системы с ЧМ часто прибегают к упрощению, принимая за модулирующее сообщение простой синусоидальный сигнал (тон). Естественно, что если в качестве модулирующего сообщения брать многоканальный телефонный сигнал, то решение существенно усложняется. Однако если число каналов велико, то статистическая структура многоканального сообщения становится наиболее простой и решение задачи становится возможным и не столь сложным. Отметим, что применение метода вероятностных весов возможно в любом случае, при любых модулирующих сообщениях.

*Сигнал и помеха на входе приемника.* Первый этап анализа заключается в том, чтобы конкретизировать соотношение (1.48) применительно к системе с ЧМ. Это соотношение отображает сумму модулированного сигнала и помехи на входе приемника.

Полезный ЧМ сигнал удобно взять в виде

$$u_c(t) = U_c e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]}, \tag{2.7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= \Delta\omega_m S(t), \\ S(t) &= \int_0^t U(t_1)\, dt_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Здесь $U(t)$ — модулирующее сообщение; $\Delta\omega_m$ — максимальная девиация частоты. Если $U(t)$ — многоканальное сообщение, то доказано, что его можно рассматривать как стационарный случайный процесс, подчиняющийся нормальному закону распределения вероятностей, плотность энергетического спектра которого определяется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} G_U(\Omega) &= G_0 = \text{const при } \Omega_1 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_2, \\ G_U(\Omega) &= 0 \text{ на всех других частотах,} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

где $\Omega = 2\pi F$ — круговая частота.

Функция корреляции такого сообщения

$$K_U(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} G_U(\Omega)\cos\Omega\tau\, d\Omega = G_0\,\frac{\sin\Omega_2\tau - \sin\Omega_1\tau}{2\pi\tau}. \tag{2.10}$$

Средняя мощность такого сообщения с полосой частот $W = F_2 - F_1$, выделяемая на сопротивление 1 Ом,

$$P_{c0} = \langle U^2(t)\rangle = K_U(0) = G_0 W. \tag{2.11}$$

Для помехи в виде белого гауссовского шума используем выражение (1.47).

Огибающая такого сигнала помехи, как было указано в разделе 1.4, подчиняется закону распределения Рэлея

$$p(U_ш) = \frac{U_ш}{\sigma^2} e^{-\frac{U_ш^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.12}$$

а фаза подчиняется равномерному закону распределения

$$p(\Theta_ш) = 1/2\pi. \tag{2.13}$$

В формуле (2.12)

$$\sigma^2 = \langle U^2(t)\rangle/2 = P_ш = \sigma_0^2 \omega, \tag{2.14}$$

т. е. является средней мощностью помехи в полосе приемника $w$ Гц и $\sigma_0^2$ — плотность энергетического спектра помехи, т. е. мощность помехи, приходящаяся на 1 Гц полосы.

Тогда результирующий сигнал на входе приемника согласно (1.48) будет

$$u = u_c + u_ш = U_c \left( e^{i\varphi} + \kappa_ш e^{-i\theta_ш} \right) e^{i\omega_0 t}. \tag{2.15}$$

Сигнал в (2.15) нетрудно представить в виде

$$u(t) = U_\Sigma(t)\, e^{i\psi(t)}, \tag{2.16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} U_\Sigma(t) &= U_c \sqrt{1 + \kappa_ш^2 + 2\kappa_ш \cos(\varphi + \Theta_ш)}, \\ \psi(t) &= \omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi - \kappa_ш \sin\Theta_ш}{\cos\varphi + \kappa_ш \cos\Theta_ш}. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Рассматривая классический случай приема ЧМ колебаний, предполагают в приемнике наличие идеального ограничителя, который сводит $U_\Sigma(t)$ к постоянной величине $U_\Sigma = \text{const}$, а результат частотного детектирования получается как первая производная фазового угла — $\psi'(t)$.

*Сумма сообщения и помехи на выходе ЧД (частотного детектора).* Прежде чем взять производную от $\psi(t)$ в (2.17), целесообразно сначала преобразовать выражение в (2.17), причем, как оказывается, применительно к случаям $\kappa_ш < 1$ и $\kappa_ш > 1$ удобно использовать разные по форме исходные соотношения для $\psi(t)$.

Нетрудно показать, что фазовый угол в (2.17) можно преобразовать к виду

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi + \operatorname{arctg}\left[ \frac{-\kappa_ш \sin(\varphi + \Theta_ш)}{1 + \kappa_ш \cos(\varphi + \Theta_ш)} \right]. \tag{2.18}$$

Такая запись удобна тем, что для $\kappa_ш < 1$ выражение для arctg разлагается в сходящийся ряд и $\psi(t)$ приобретает форму

$$\psi(t) = \omega_0(t) + \varphi - \kappa_ш \sin\xi + \frac{\kappa_ш^2}{2} \sin 2\xi - \frac{\kappa_ш^3}{3} \sin 3\xi + \cdots, \tag{2.19}$$

где $\xi = \varphi + \Theta_ш$.

Взяв первую производную от $\psi(t)$ в (2.19), отбросив постоянную составляющую и учитывая (2.18), получим для суммы сообщения и шума на выходе ЧД выражение

$$U_{в}(t) = U(t) - \frac{\xi'}{\Delta\omega_m}\left(\kappa_{ш}\cos\xi - \kappa_{ш}^2\cos 2\xi + \kappa_{ш}^3\cos 3\xi - \ldots\right). \tag{2.20}$$

Соотношения (2.19) и (2.20) могут использоваться для определения спектров сообщения и помехи на выходе приемника. Практически используются упрощенные соотношения, получающиеся в результате отбрасывания всех членов с $\kappa_{ш}$ в степени, большей единицы. Такие упрощенные соотношения будут без постоянной составляющей:

$$\psi(t) \approx \varphi - \kappa_{ш}\sin\xi, \tag{2.21}$$

$$U_{в}(t) \approx U(t) - \frac{1}{\Delta\omega_m}\kappa_{ш}\xi'\cos\xi. \tag{2.22}$$

Для случая $\kappa_{ш} > 1$ удобным является представление выражения для $\psi(t)$ в (2.17) в виде

$$\psi(t) = \omega_0 t - \Theta_{ш} - \operatorname{arctg}\left[\frac{(-1/\kappa_{ш})\sin(\varphi + \Theta_{ш})}{1 + (1/\kappa_{ш})\cos(\varphi + \Theta_{ш})}\right]. \tag{2.23}$$

В этом случае arctg также разлагается в сходящийся ряд и можно найти

$$\psi(t) = \omega_0 t - \Theta_{ш} + \frac{1}{\kappa_{ш}}\sin\xi - \frac{1}{2\kappa_{ш}^2}\sin 2\xi + \frac{1}{3\kappa_{ш}^3}\sin 3\xi - \ldots \tag{2.24}$$

Для достаточно больших значений $\kappa_{ш}$, как и в предыдущем случае, можно использовать и такие упрощенные соотношения:

$$\psi(t) \approx -\Theta_{ш} + \frac{1}{\kappa_{ш}}\sin\xi, \tag{2.25}$$

$$U_{в}(t) \approx -\frac{\Theta'_{ш}}{\Delta\omega_m} + \frac{1}{\kappa_{ш}\Delta\omega_m}\xi'\cos\xi. \tag{2.26}$$

Используя исходные соотношения (2.21) и (2.25) или (2.22) и (2.26), можно найти энергетический спектр суммы сообщения и шума на выходе ЧМ приемника.

*Определение спектра сообщения+помеха на выходе приемника при относительно слабой помехе* ($\kappa_{ш} < 1$). Здесь не приводится вычисление спектра, так как тако-

вое выполнено во многих опубликованных работах. Покажем лишь общую методику и порядок вычисления (более подробно см. [23]).

Будем искать спектр из упрощенного соотношения для $U_в(t)$, данного в (2.22) так, как было уже отмечено, при этом получаются практически достаточно точные результаты. Однако, как можно убедиться, проще вычислить спектр для интеграла от $U_в(t)$ [см. (2.8)], т. е. для

$$S_в(t) = S(t) - \frac{\kappa_ш}{\Delta\omega_m} \sin[\Delta\omega_m S(t) + \Theta_ш], \tag{2.27}$$

а затем, зная этот спектр $G_{S_в}(\Omega)$, получить спектр $G_{U_в}(\Omega)$ для $U_в(t)$ по известной формуле

$$G_{U_в}(\Omega) = \Omega^2 G_{S_в}(\Omega). \tag{2.28}$$

Для определения спектра применим классический метод, в соответствии с которым найдем сначала корреляционную функцию от $S_в(t)$.

Согласно теории корреляции, если функция $S(t) = \Sigma S_\nu(t)$, то корреляционная функция $S(t)$ будет

$$K_S(\tau) = \sum_{\nu=1,2\ldots} K_\nu(\tau) + \sum_{\mu\neq\nu} (-1)^{\nu+\mu} K_{\nu\mu}(\tau),$$

где $K_\nu(\tau)$ — автокорреляционная функция от $S_\nu(t)$; $(-1)^{\nu+\mu} K_{\nu\mu}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция от функций $S_\nu(t)$ и $S_\mu(t)$. В соответствии с этим правилом корреляционная функция от $S_в(t)$ в (2.27) равна сумме автокорреляционных функций от первого и второго членов и взаимной корреляционной функции от этих двух членов. Однако, как показывают расчеты, взаимной корреляционной функцией можно в данном случае пренебречь. Физически это можно понять из того факта, что первый член в правой части (2.27) характеризует полезное сообщение, а второй — характеризует в основном помеху, которые являются взаимно независимыми.

Что касается функции $S(t)$ в (2.27), то сразу можно получить спектр этой функции без вычисления ее корреляционной функции. Действительно, так как спектр $U(t)$ многоканального сообщения известен и дан в (2.9), то спектр $S(t) = \int U(t)\,dt$ будет в соответствии с (2.28)

$$\left.\begin{aligned} &G_S(\Omega) = G_0/\Omega^2 \text{ при } \Omega_1 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_2, \\ &G_S(\Omega) = 0 \text{ для всех других частот.} \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

Для нахождения спектра второго члена правой части (2.27) найдем сначала его автокорреляционную функцию. Обозначив этот член кратко через $\varepsilon_1(\kappa_ш, \Theta_ш, S)$, для получения его автокорреляционной функции используем выражение

$$K_{\varepsilon 1}(\tau) = \overbrace{\int\int\int\int\int}^{\infty}_{-\infty} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1(\kappa_ш \Theta_ш S)\, \varepsilon_1(\kappa_{шτ}, \Theta_{шτ}, S_\tau) \times$$

$$\times p(\kappa_ш, \Theta_ш, S, \kappa_{шτ}, \Theta_{шτ}, S_\tau)\, d\kappa_ш\, d\kappa_{шτ}\, d\Theta_ш\, d\Theta_{шτ}\, dS dS_\tau. \tag{2.30}$$

В этом выражении $\kappa_ш$, $\Theta_ш$, $S$ — значения этих трех случайных параметров в момент времени $t$; $\kappa_{шτ}$, $\Theta_{шτ}$, $S_\tau$ — значения этих же параметров в момент времени $t+\tau$; $p(\kappa_ш, \Theta_ш, S, \kappa_{шτ}, \Theta_{шτ}, S_\tau)$ — шестимерный дифференциальный закон распределения этих параметров.

Так как параметры $\kappa_ш$, $\kappa_{шτ}$, $\Theta_ш$, $\Theta_{шτ}$ независимы от параметров $S$ и $S_\tau$, то справедливо

$$p(\kappa_ш, \kappa_{шτ}, \Theta_ш, \Theta_{шτ}, S, S_\tau) = p(\kappa_ш, \kappa_{шτ}, \Theta_ш, \Theta_{шτ})\, p(S, S_\tau).$$

Поскольку мы рассматриваем помеху в виде гладкого флуктуационного шума, подчиняющегося нормальному закону распределения и такому же закону подчинено сообщение $U(t)$, то, как известно, [1, 3] в этом случае

$$p(S, S_\tau) = \frac{1}{2\pi K_S(0)\sqrt{1-R_S^2}} \exp\left[-\frac{S^2 + S_\tau^2 - 2R_S SS_\tau}{2K_S(0)(1-R_S^2)}\right], \tag{2.31}$$

$$p(\kappa_ш, \kappa_{шτ}, \Theta_ш, \Theta_{шτ}) = \frac{\kappa_ш \kappa_{шτ}}{4\pi^2\sigma^4(1-r^2)} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\kappa_ш^2 + \kappa_{шτ}^2 - 2\kappa_ш\kappa_{шτ} r\cos(\Theta_{шτ} - \Theta_ш)}{2\sigma^2(1-r^2)}\right], \tag{2.32}$$

где $K_S(\tau)$ — корреляционная функция от $S(t)$; $K_S(0)$ — значение этой функции при $\tau=0$, равное среднему значению квадрата $\langle S^2(t)\rangle$; $R_S = K_S(\tau)/K_S(0)$ — коэффициент корреляции; $r = r(\tau)$ — коэффициент, определяющий корреляционную функцию шума на выходе УПЧ; $\sigma^2 = \sigma_0^2 w$ дано в (2.14);

$$K_ш(\tau) = \sigma_0^2 w_r(\tau)\cos\omega_0\tau. \tag{2.33}$$

Вид коэффициента $r(\tau)$ зависит от вида АЧХ УПЧ. Если характеристика идеальная с полосой $w$, то

$$r(\tau) = \sin \pi w \tau / \pi w \tau. \tag{2.34}$$

Для многокаскадного УПЧ с одиночными контурами можно принять гауссовскую форму АЧХ, и тогда

$$r(\tau) = e^{-\pi \omega^2 \tau^2}, \tag{2.35}$$

где $\omega$ — энергетическая ширина полосы спектра на выходе УПЧ, равная примерно полосе усилителя.

Расчет $K_{\varepsilon_1}(\tau)$ в (2.30) выполняется теперь по соотношению

$$K_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{1}{\Delta\omega_m^2} \frac{1}{2\pi K_S(0)\sqrt{1-R_S^2}} \frac{1}{4\pi^2\sigma^4(1-r^2)} \times$$

$$\times \underbrace{\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \kappa_{\text{ш}}^2 \kappa_{\text{шт}}^2 \sin(\Delta\omega_m S + \Theta_{\text{ш}}) \sin(\Delta\omega_m S_\tau +$$

$$+ \Theta_{\text{шт}}) \exp\left[-\frac{\kappa_{\text{ш}}^2 + \kappa_{\text{шт}}^2 - 2\kappa_{\text{ш}}\kappa_{\text{шт}} r \cos(\Theta_{\text{шт}} - \Theta_{\text{ш}})}{2\sigma^2(1-r^2)}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{S^2 + S_\tau^2 - 2R_S S S_\tau}{2K_S(0)(1-R_S^2)}\right] d\kappa_{\text{ш}} d\kappa_{\text{шт}}\, d\Theta_{\text{ш}}\, d\Theta_{\text{шт}}\, dS dS_\tau. \tag{2.36}$$

Решение этих интегралов дает компактное соотношение

$$K_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{\sigma^2 r}{2\Delta\omega_m^2} \exp\{-\Delta\omega_m^2 [K_S(0) - K_S(\tau)]\}. \tag{2.37}$$

Чтобы получить пригодную для дальнейших расчетов формулу для $K_{\varepsilon_1}(\tau)$, необходимо найти сначала выражение через параметры сообщения для $K_S(0) - K_S(\tau)$.

Из (2.29) получаем $K_S(\tau) = \frac{G_0}{2\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\cos \Omega\tau}{\Omega^2} d\Omega$. Отсюда

$$K_S(0) - K_S(\tau) = \frac{G_0}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin^2 \frac{\Omega\tau}{2}}{\Omega^2} d\Omega. \tag{2.38}$$

Анализ этого соотношения показывает, что для широкополосных систем с большим $\Delta\omega_m$ и при большом от-

ношении $\Omega_2/\Omega_1$ можно для (2.38) при учете (2.11) получить следующее приближенное соотношение:

$$K_S(0) - K_S(\tau) \approx \frac{G_0}{2\pi} \cdot \frac{\Delta\Omega\tau^2}{2} = \frac{K_U(0)\,\tau^2}{2}, \qquad (2.39)$$

где $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Подставив это значение в (2.37), получим

$$K_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{\sigma^2 r}{2\Delta\omega_m^2} \exp\left[-\frac{K_U(0)\,\Delta\omega_m^2\,\tau^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2 r K_U(0)}{2\Delta\omega_e^2} \exp\left[-\frac{\Delta\omega_e^2\,\tau^2}{2}\right]. \qquad (2.40)$$

В этом соотношении $\Delta\omega_e = \sqrt{K_U(0)}\,\Delta\omega_m$ есть эффективное значение девиации частоты, часто используемое в практике и нормируемое на один канал при передаче многоканального телефонного сигнала по системе с ЧМ.

Взяв $r(\tau)$ в виде гауссовской кривой (2.35), окончательно получим

$$K_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{\sigma^2 K_U(0)}{2\Delta\omega_e^2} \exp\left[-\left(\pi w^2 + 2\pi^2\Delta f_e^2\right)\tau^2\right]. \qquad (2.41)$$

Теперь можно определить энергетический спектр помехи на выходе приемника:

$$G_{\varepsilon_1}(F) = 4\Omega^2 \int_0^\infty K_{\varepsilon_1}(\tau)\cos\Omega\tau\, d\tau = \frac{2\sigma^2\Omega^2 K_U(0)}{\Delta\omega_e^2} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\pi\left(w^2 + 2\pi\Delta f_e^2\right)\tau^2} \cos\Omega\tau\, d\tau.$$

Взяв значение интеграла по таблице, получим

$$G_{\varepsilon_1}(F) = \frac{K_U(0)\,F^2}{2\rho\Delta f_e^2\sqrt{w^2 + 2\pi\Delta f_e^2}} \exp\left[-\frac{\pi F^2}{w^2 + 2\pi\Delta f_e^2}\right]. \qquad (2.42)$$

Здесь $\rho = 1/2\sigma^2 = P_c/P_ш$ — сигнал/помеха на входе приемника, если учесть, что мы проводим расчет для нормированного сигнала с единичной амплитудой и нормированного шума с амплитудой $-K_ш$ [см. (2.15)].

Значения частот многоканального сообщения и эффективная девиация обычно удовлетворяют условиям $F \ll w$ и $\Delta f_e \ll w$. Учитывая это, (2.42) можно упростить:

$$G_{\varepsilon_1}(F) = G_0 W F^2/2\rho\Delta f_e^2 w. \qquad (2.43)$$

Спектр шума при отсутствии полезной модуляции получим, приравнивая в (2.42) $K_U(0)=0$ и $\Delta\omega_m=1$. Тогда получим

$$G_{\varepsilon_1}(F)=(F^2/2\rho w)\,e^{-\frac{\pi F^2}{w}}\approx F^2/2\rho w. \qquad (2.44)$$

Общий спектр сигнала на выходе приемника $S'_в(t)$ [см. (2.27)], очевидно, будет для случая $k_ш<1$

$$G_{\kappa_ш<1}(F)=G_0+G_0WF^2/2\rho\Delta f_e^2 w=G_0\left(1+WF^2/2\rho\Delta f_e^2 w\right). \qquad (2.45)$$

*Определение спектра суммы сообщения и помехи на выходе приемника при сильной помехе* ($\kappa_ш>1$). Для этого будем искать спектр от выражения, являющегося интегралом (2.26), т. е. от

$$S_{в1}(t)=-\frac{\Theta_ш}{\Delta\omega_m}+\frac{1}{\kappa_ш\Delta\omega_m}\sin\left[\Delta\omega_m S(t)+\Theta_ш\right]. \qquad (2.46)$$

Нахождение спектра производной $\Theta'_ш$, т. е. от производной первого члена в ф-ле (2.46), представляется трудным, но оно уже выполнено Райсом [15] и приведено в [3]. Этот спектр в наших обозначениях будет

$$G_\Theta(F)=\frac{\sqrt{2}\pi w}{\Delta\omega_m^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\pi F^2}{2n w^2}}. \qquad (2.47)$$

Учитывая, как и в предыдущем случае, что в реальных условиях работы $F\ll w$, выражение (2.47) существенно упрощается:

$$G_\Theta(F)\approx\frac{\sqrt{2}\pi w}{\Delta\omega_m^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}\approx\frac{12w}{\Delta\omega_m^2}=\frac{12wG_0W}{\Delta\omega_e^2}\approx\frac{G_0wW}{3\Delta f_e^2}. \qquad (2.48)$$

Чтобы определить спектр, соответствующий второму члену в правой части (2.46), вычислим сначала корреляционную функцию от этого члена:

$$K_{\varepsilon_2}(\tau)=\frac{1}{\Delta\omega_m^2}\,\frac{1}{2\pi K_S(0)\sqrt{1-R_S^2}}\,\frac{1}{4\pi^2\sigma^4(1-r^2)}\times$$

$$\times\underbrace{\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int\sin\left(\Delta\omega_ш S+\Theta_ш\right)\sin\left(\Delta\omega_m S_\tau+\Theta_{шt}\right)\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\kappa_{ш}^2+\kappa_{шτ}^2-2\kappa_{ш}\kappa_{шτ}r\cos(\Theta_{шτ}-\Theta_{ш})}{2\sigma^2(1-r^2)}\right]\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{S^2+S_\tau^2-2R_S SS_\tau}{2K_S(0)\left(1-R_S^2\right)}\right] d\kappa_{ш}d\kappa_{шτ}\,d\Theta_{ш}d\Theta_{шτ}\,dSdS_\tau. \quad (2.49)$$

Несложные, но громоздкие вычисления после упрощений дают

$$K_{ε2}(\tau)\approx\frac{\rho}{4\Delta\omega_m^2}e^{-\frac{\Delta\omega_e^2\tau^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n+1}}{n+1}. \quad (2.50)$$

Взяв вновь гауссовскую частотную характеристику для канала УПЧ и подставляя в (2.50) ее выражение (2.35), получим

$$K_{ε_2}(\tau)\approx\frac{\rho}{4\Delta\omega_m^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}e^{-\left[(2n+1)\,\pi w^2+2\pi^2\Delta f_e^2\right]\tau^2}. \quad (2.51)$$

Вычисление спектра по $K_{ε_2}(\tau)$ приводит к соотношению

$$G_{ε_2}(\tau)=\frac{K_U(0)\,\rho F^2}{2\Delta f_e^2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{(2n+1)\,w^2+2\pi\Delta f_e^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\frac{\pi F^2}{(2n+1)\,w^2+2\pi\Delta f_e^2}\right]\right\}. \quad (2.52)$$

Учитывая, как и ранее, что $F\ll w$ и $\Delta f_e\ll w$, получим далее

$$G_{ε_2}(F)\approx\frac{K_U(0)\,\rho F^2}{2\Delta f_e^2 w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{2n+1}}\approx$$

$$\approx\frac{1{,}4K_U(0)\,\rho F^2}{\Delta f_e^2 w}=\frac{1{,}4G_0F^2W\rho}{\Delta f_e^2 w}. \quad (2.53)$$

Общий спектр на выходе приемника при $\kappa_{ш}>1$ будет суммой спектров в (2.48) и (2.53):

$$G_{\kappa_{ш}>1}(F)=\frac{G_0wW}{3\Delta f_e^2}+\frac{1{,}4G_0W\rho F^2}{\Delta f_e^2 w}=\frac{G_0W}{3\Delta f_e^2}\left(w+\frac{4{,}2\rho F^2}{w}\right). \quad (2.54)$$

*Общий спектр суммы сообщения и шума на выходе ЧМ приемника, определяемый по методу вероятностных весов.* Определив спектры $G_{\kappa_{ш}<1}(F)$ и $G_{\kappa_{ш}>1}(F)$, теперь можно найти общий усредненный спектр по ф-ле (2.5), для чего необходимо знать еще вероятности $P(\kappa_{ш}>1)$ и $P(\kappa_{ш}<1)=1-P(\kappa_{ш}>1)$. Известно [3], что при флуктуационных шумах на входе приемника

$$P(\kappa_{ш}>1)=e^{-\rho}, \tag{2.55}$$

и, следовательно,

$$P(\kappa_{ш}<1)=1-e^{-\rho}, \tag{2.56}$$

где $\rho=P_c/P_{ш}$ на входе приемника. Используя эти вероятности и выражения для спектров (2.45) и (2.54), получим для общего среднего спектра

$$G(F)=G_0\left[\left(1-e^{-\rho}\right)+\frac{WF^2}{2\Delta f_e^2 w}\cdot\frac{1-e^{-\rho}}{\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{wW}{3\Delta f_e^2}e^{-\rho}+\frac{1{,}4WF^2}{\Delta f_e^2 w}\rho e^{-\rho}\right]. \tag{2.57}$$

Первый член в этой формуле дает плотность спектра первичного передаваемого многоканального сообщения. По мере уменьшения $\rho=P_c/P_{ш}$, т. е. по мере относительного роста шума на выходе приемника, плотность этого спектра на выходе приемника непрерывно уменьшается, приближаясь к нулю. Таким образом, шум подавляет полезное сообщение. Одновременно с этим растут второй и третий члены в (2.57), характеризующие основные компоненты шума.

Имея значения плотности спектра $G(F)$, можно вычислить мощности полезного сообщения и шума на выходе приемника. Для этого необходимо взять интеграл от соотношения (2.57) в полосе полезного сообщения, т.е.

$$P=\int_{F_1}^{F_2}G(F)\,dF. \tag{2.58}$$

Выполнив интегрирование в полосе от 0 до $F_2$, которая в широкополосной системе равна $\sim W$, получим

$$P=P_{св}+P_{шв}=P_{со}\left[\left(1-e^{-\rho}\right)+\frac{W^3}{6\Delta f_e^2 w}\cdot\frac{1-e^{-\rho}}{\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{wW}{3\Delta f_e^2}e^{-\rho}+\frac{W^3}{2\Delta f_e^2 w}\rho e^{-\rho}\right]. \tag{2.59}$$

Здесь $P_{со}$ определено в (2.11).

Отсюда значения мощности сообщения на выходе $P_{св}$ и мощности шума $P_{шв}$ могут быть после небольших преобразований записаны таким образом:

$$\left.\begin{aligned} P_{св} &= P_{с0}\left(1-e^{-\rho}\right), \\ P_{шв} &= P_{с0}\left(\frac{w}{2\Delta f_e}\right)^2\left[\frac{2W^3}{3w^3}\,\frac{1-e^{-\rho}}{\rho}+\frac{4W}{3w}\,e^{-\rho}+\frac{2W^3}{w^3}\,\rho\,e^{-\rho}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

Для удобства сравнения с некоторыми другими работами введем обозначение $\gamma = w/2W$ и, разделив $P_{св}/P_{шв}$, получим такое соотношение:

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}}\left(\frac{w}{2\Delta f_e}\right)^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{12\gamma^3}\,\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{2}{3\gamma}\,\dfrac{1}{e^{\rho}-1}+\dfrac{1}{4\gamma^3}\,\dfrac{\rho}{e^{\rho}-1}}. \tag{2.61}$$

Из этого соотношения видно, что отношение сигнал/шум зависит от трех параметров: $\rho, \gamma$ и $w/2\Delta f_e$.

Очень удобна для расчетов формула, легко выводимая из (2.61); если учесть, что $w/2\Delta f_e = \gamma\ (W/\Delta f_e)$, и разделить обе части соотношения (2.61) на множитель $(w/2\Delta f_э)^2 = \gamma^2 (W/\Delta f_e)^2$, тогда получим

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \left(\frac{\Delta f_e}{W}\right)^2 \frac{1}{\dfrac{1}{12\gamma\rho}+\dfrac{2\gamma}{3\left(e^{\rho}-1\right)}+\dfrac{\rho}{4\gamma\left(e^{\rho}-1\right)}}. \tag{2.62}$$

При условии $e^{\rho} \gg 1$, что можно считать справедливым уже при $\rho = 2 \div 3$, вместо (2.62) можно получить такую упрощенную формулу:

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \left(\frac{\Delta f_e}{W}\right)^2 \frac{12\gamma\, e^{\rho}}{\dfrac{e^{\rho}}{\rho}+8\gamma^2+3\rho}. \tag{2.63}$$

*Отношение сообщение/шум в индивидуальном телефонном канале.* В практике нормируется мощность сообщения и шума и соответственно отношение сообщение/шум в индивидуальном телефонном канале для многоканальных телефонных систем связи [2]. Покажем, как перейти от полученных выше формул для многоканального сообщения к расчетным формулам для сообщения и шума в индивидуальном канале.

Прежде всего, принимается, что в пределах индивидуального канала частота $F$ постоянна и равна средней

частоте $F_k$ для $k$-го канала. Тогда, исходя из соотношения (2.57) и используя (2.58), можно найти

$$P_{ck} = P_{c0}\left(1 - e^{-\rho}\right) e^{-2p_{cp}}, \tag{2.64}$$

$$P_{шk} = P_{c0}\left(\frac{\Delta F_k F_k^2}{2\Delta f_e^2 w}\,\frac{1 - e^{-\rho}}{\rho} + \frac{w\Delta F_k}{3\Delta f_e^2} e^{-\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1{,}4\Delta F_k F_k^2}{\Delta f_e^2 w}\rho e^{-\rho}\right). \tag{2.65}$$

В этих формулах $P_{ck}$ мощность сообщения в $k$-м канале; $P_{шk}$ — мощность шума в этом же канале; $\Delta F_k$ — полоса индивидуального канала; $p_{cp}$ — уровень многоканального сообщения, методы определения которого можно найти в [2, 24, 25].

Аналогично (2.64) определяется эффективная девиация частоты, приходящаяся на один канал:

$$f_{e1}^2 = \Delta f_e^2 e^{-2p_{cp}}. \tag{2.66}$$

С учетом этого соотношение (2.65) можно переписать в виде

$$P_{шk} = P_{c0} e^{-2p_{cp}} \frac{\Delta F_k F_k^2}{\Delta f_{e1}^2 w}\left(\frac{1 - e^{-\rho}}{2\rho} + 1{,}4\rho e^{-\rho} + \frac{w^2}{3F_k^2} e^{-\rho}\right). \tag{2.67}$$

Отношение мощностей сигнал/шум из (2.64) и (2.67) получим в виде

$$\frac{P_{ck}}{P_{шk}} = \frac{\Delta f_{e1}^2 w}{\Delta F_k F_k^2} \frac{1}{\frac{1}{2\rho} + \frac{1{,}4\rho}{e^{\rho} - 1} + \frac{w^2}{3F_k^2}\,\frac{1}{e^{\rho} - 1}}. \tag{2.68}$$

*Результаты расчета отношения мощностей сообщение/шум по полученным формулам и сравнение с расчетами других авторов.* Приведем, прежде всего, результаты расчета зависимости отношения $P_{ck}/P_{шk}$ от $\rho = P_c/P_ш$ для верхнего канала 60-канальной системы связи с параметрами: $N = 60$ каналов; $\Delta F_k = 3{,}1$ кГц; $F_k = 250$ кГц; $w = 6$ МГц; $\Delta f_{e1} = 100$ кГц; $P_{cp} = 8{,}7$ дБ. Расчет выполнен по ф-ле (2.68). Результаты расчета приведены на рис. 2.1.

Как видно из ф-лы (2.68), отношение $P_{ck}/P_{шk}$ пропорционально $f_{e1}^2$, и, пользуясь кривой рис. 2.1, это отно-

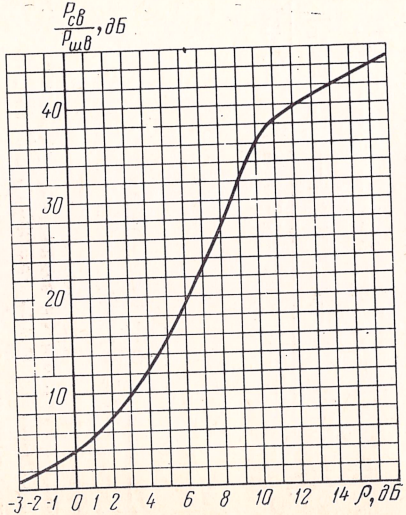


Рис. 2.1

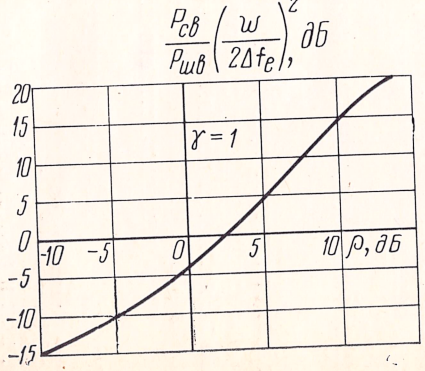


Рис. 2.2

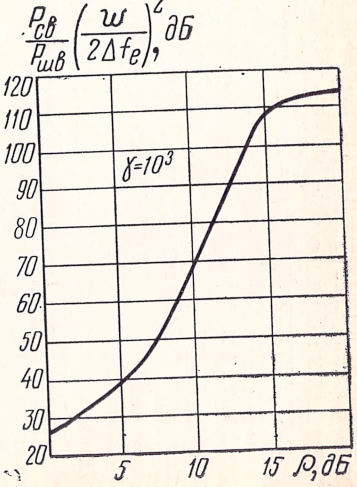


Рис. 2.3

шение легко вычисляется для любого значения $\rho$ и $\Delta f_{e1}$. Пороговое значение $\rho$ лежит в пределах 9—11 дБ.

Вычислим также кривые, отображающие соотношение (2.61) для узкополосной ($\gamma=1$) и широкополосной ($\gamma=10^3$) систем. Эти кривые приведены на рис. 2.2 и 2.3. Они весьма близки к кривым, приведенным в [26], если еще учесть, что в этой работе взята максимальная девиация $\delta f$. Наши кривые вычерчены при эффективной девиации многоканального сообщения $\Delta f_e=\Delta f_m/2$, что реально.

Приведенные количественные оценки, полученные по «методу вероятностных лесов» свидетельствуют о том, что метод дает точность в оценке шумов не меньшую, чем другие методы, и позволяет определять пороговое значение отношения $\rho=P_c/P_ш$ при различных параметрах системы связи.

## 2.3. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПОМЕХ В СИСТЕМЕ С АМ

Представляет интерес применить «метод вероятностных весов» к анализу помехоустойчивости системы с АМ. Эта система не является пороговой при наиболее типичных значениях $\rho\geqslant 1$, что и подтверждают «метод вероятностных весов» и возможности его широкого применения.

Как показано в (1.43), АМ сигнал имеет вид

$$u_c(t)=U_c[1+MU(t)]\,e^{i\omega_0 t}.$$

Помеху, как и ранее, берем в виде (1.47). Суммарный сигнал на входе приемника в соответствии с (1.48) будет

$$u(t)=u_c(t)+u_ш(t)=U_c[1+MU(t)+\kappa_ш e^{-i\Theta_ш}]\times$$
$$\times e^{i\omega_0 t}=U_c[1+MU(t)+\kappa_ш\cos\Theta_ш-i\,\kappa_ш\sin\Theta_ш]\times$$
$$\times e^{i\omega_0 t}=U_c\sqrt{[1+MU(t)+\kappa_ш\cos\Theta_ш]^2+\kappa_ш^2\sin^2\Theta_ш}\times$$
$$\times e^{i(\omega_0 t+\psi)}, \qquad (2.69)$$

где

$$\psi=\operatorname{arctg}\left[-\frac{\kappa_ш\sin\Theta_ш}{1+MU(t)+\kappa_ш\cos\Theta_ш}\right]. \qquad (2.70)$$

[1] В кривых на рис. 3 и 4 работы [26] ошибочно указано, что по оси ординат откладывается величина $P_c/P$ $(2\delta f/\Delta F)$. Фактически откладывается величина $P_c/P_ш$ $(\Delta F/2\delta f)$.

Таким образом, суммарный сигнал на входе приемника можно рассматривать как синусоидальный сигнал, модулированный по амплитуде и фазе одновременно. Амплитудный детектор огибающей реагирует лишь на изменения амплитуды. Если детектор линейный, который используют в большинстве случаев, то на выходе детектора получают суммарное напряжение сигнала и шума, равное

$$E(t) = \alpha U_c \sqrt{[1 + MU(t) + \kappa_ш \cos\Theta_ш]^2 + \kappa_ш^2 \sin^2\Theta_ш} =$$

$$= \alpha U_c \sqrt{[1 + MU(t)]^2 + 2\kappa_ш [1 + MU(t)] \cos\Theta_ш + \kappa_ш^2}. \quad (2.71)$$

Здесь $\alpha$ — постоянный коэффициент.

Как и для ЧМ системы, рассмотрим два случая: $\kappa_ш < 1$ и $\kappa_ш > 1$.

*Случай* $\kappa_ш < 1$. В этом случае, пренебрегая величиной $\kappa_ш^2$ под корнем в (2.71), получим упрощенное соотношение для $E(t)$:

$$E(t) = \alpha U_c [1 + MU(t) + \kappa_ш \cos\Theta_ш]. \quad (2.72)$$

Анализируя это соотношение, видим, что полезное сообщение отображается вторым членом в (2.72):

$$E_c(t) = \alpha U_c MU(t), \quad (2.73)$$

а помеха отображается третьим членом

$$E_ш(t) = \alpha U_c \kappa_ш \cos\Theta_ш. \quad (2.74)$$

Найдем спектры $E_c(t)$ и $E_ш(t)$.

Рассматривая и здесь случай модуляции многоканальным сообщением, спектр которого определен в (2.9), для спектра $E_c(t)$ получаем очевидное выражение[1]

$$G_c(F) = \alpha^2 U_c^2 M^2 G_0. \quad (2.75)$$

Спектр $E_ш(t)$ вычисляется немного более сложно. Согласно (1.37) произведение $\kappa_ш \cos\Theta_ш = A_ш(t)$ и, как показано в [1], корреляционная функция от $A_ш(t)$ равна $\sigma^2 r(\tau)$, что дает для (2.74)

$$K_ш(\tau) = \alpha^2 U_c^2 \sigma^2 r(\tau) = \frac{\alpha^2 U_c^2}{2\rho} r(\tau). \quad (2.76)$$

---

[1] Надо иметь в виду, что $G_0$ здесь безразмерная величина, поскольку это спектр функции $U(t)$ — безразмерной функции.

Как и для ЧМ систем, возьмем выражение для $r(\tau)$, соответствующее вероятностной характеристике усилителя, т. е. в виде (2.35). Тогда вместо (2.76) получим

$$K_{ш}(\tau) = \frac{\alpha^2 U_c^2}{2\rho} e^{-\pi w^2 \tau^2}. \quad (2.77)$$

Тогда для плотности спектра шума получим выражение

$$G_{ш}(F) = 4\int_0^\infty K_{ш}(\tau)\cos\Omega\tau\, d\tau = \frac{\alpha^2 U_c^2}{w\rho} e^{-\frac{\pi F^2}{w^2}}. \quad (2.78)$$

Суммарная плотность спектра будет при $\kappa_{ш}<1$

$$G_{\kappa_{ш}<1}(F) = \alpha^2 U_c^2\left(M^2 G_0 + \frac{1}{w\rho} e^{-\frac{\pi F^2}{w^2}}\right). \quad (2.79)$$

Проинтегрировав это соотношение в полосе сообщения, получим выражение для мощностей

$$P_{\kappa_{ш}<1} = \alpha^2 U_c^2 M^2 G_0 (F_2 - F_1) + \alpha^2 U_c^2 \frac{1}{2\rho} \times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\pi}F_2}{w}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{\pi}F_1}{w}\right)\right] \approx \alpha^2 U_c^2\left(M^2 P_{c0} + \frac{W}{\rho w}\right). \quad (2.80)$$

Отношение $P_{св}/P_{шв}$ легко следует из (2.80):

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = M^2 P_{c0}\frac{w}{W}\rho = M^2 P_{c0}\frac{w}{W}\frac{P_c}{P_ш}, \quad (2.81)$$

где $P_c$ — мощность несущей сигнала на входе приемника; $P_ш$ — мощность шума на входе приемника. В процессе АМ эффективная мощность сигнала

$$P_{ce} = P_c(1 + M^2/2). \quad (2.82)$$

Подставив в (2.81) значение $P_c$ из (2.82), получим

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{M^2}{1 + \frac{M^2}{2}}\frac{w}{W} P_{c0}\cdot\frac{P_{ce}}{P_ш}. \quad (2.83)$$

Учитывая, что в АМ приемниках $w \approx 2W$, и взяв $M=1$, получим $P_{св}/P_{шв} \approx 1{,}3P_{c0}$ $(P_{ce}/P_ш)$. Если модулирующее сообщение — синусоидальное колебание, тогда $P_{c0}=0{,}5$ и

$$(P_{св}/P_{шв}) \approx (2/3)(P_{ce}/P_ш). \quad (2.84)$$

Таким образом, АМ практически не дает выигрыша для отношения сообщение/шум на выходе приемника по

сравнению с отношением сигнал/шум на входе приемника.

*Случай* $\kappa_{ш} \gg 1$. В этом случае в соотношении (2.71) мы можем пренебречь под корнем членом $[1+MU(t)]^2$ по сравнению с другими членами. Тогда получим для смеси сообщения и шума на выходе выражение

$$E(t) = \alpha U_c \{\kappa_{ш} + [1 + MU(t)] \cos \Theta_{ш}\}. \qquad (2.85)$$

Для нахождения спектра сигнала, выражаемого соотношением в фигурных скобках, необходимо найти сначала корреляционные функции от $\kappa_{ш}$ и $[1+MU(t)]\cos\Theta_{ш}$. Корреляционная функция для огибающей шума (соответствующей нашей нормированной огибающей $\kappa_{ш}$) вычислялась рядом авторов [1, 3]. Она равна при симметричной полосе канала

$$K_{\kappa_{ш}}(\tau) = \frac{\pi\sigma^2}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 r^4 \cdots\right]. \qquad (2.86)$$

Первый член ряда соответствует постоянной составляющей и не представляет интереса. Ряд быстро затухает, поэтому возьмем приближенное значение для $K_{\kappa ш}(\tau)$

$$K_{\kappa_{ш}}(\tau) \approx \pi\sigma^2 r^2/8 = \pi r^2(\tau)/16\rho. \qquad (2.87)$$

Тогда спектр $\alpha U_c \kappa_{ш}$ будет

$$G_{\kappa_{ш}}(F) = \frac{\pi\alpha^2 U_c^2}{4\rho}\int_0^{\infty} e^{-2\pi w^2\tau^2}\cos\Omega\tau\, d\tau = \frac{\pi\alpha^2 U_c^2}{8\sqrt{2}\rho w} e^{-\frac{\pi F^2}{2w^2}}. \qquad (2.88)$$

Вычислим теперь спектр произведения $\alpha U_c[1+MU(t)]\cos\Theta_{ш}$. Так как $U(t)$ и $\Theta_{ш}$ — взаимно независимые случайные функции, тогда в соответствии с (1.42) корреляционная функция от произведения равна произведению корреляционных функций сомножителей.

Корреляционная функция от $[1+MU(t)]$ при многоканальном сообщении $U(t)$ имеет вид, приведенный в (2.10).

Корреляционная функция от $\cos\Theta_{ш}$ вычислена в [3], и ее приближенное значение

$$K_{\cos\Theta_{ш}}(\tau) \approx \pi r(\tau)/8. \qquad (2.89)$$

Спектр произведения $[1+MU(t)]\cos\Theta_{ш}$ тогда будет

$$G_{пр}(F) = 4\alpha^2 U_c^2 \int_0^{\infty} K_U(\tau) K_{\cos\Theta_{ш}} \cos\Omega\tau\, d\tau \approx \frac{\alpha^2 U_c^2 M^2 G_0}{16} \times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{\Omega_2+\Omega}{2\sqrt{\pi}\,w}\right)-\Phi\left(\frac{\Omega_1+\Omega}{2\sqrt{\pi}\,w}\right)+\Phi\left(\frac{\Omega_2-\Omega}{2\sqrt{\pi}\,w}\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi\left(\frac{\Omega_1-\Omega}{2\sqrt{\pi}\,w}\right)\right]. \qquad (2.90)$$

Учитывая, что в практике обычно аргументы функции $\Phi(x) - x$ малы, можно принять $\Phi(x) \approx (2/\sqrt{\pi})\,x$, и тогда найдем

$$G_{\text{пр}}(F) \approx \frac{\alpha^2 U_c^2 M^2 G_0 \pi W}{4w}. \qquad (2.91)$$

Суммарный спектр будет по (2.88) и (2.91)

$$\overline{G}_{\text{к}_\text{ш}>1}(F) = \alpha^2 U_c^2\left(\frac{\pi}{8\sqrt{2}\,w\rho}\,e^{-\frac{\pi F^2}{2w^2}}+\frac{M^2 G_0 \pi W}{4w}\right). \qquad (2.92)$$

Проинтегрировав в полосе, получим для мощности на выходе

$$P_{\text{к}_\text{ш}>1} \approx \alpha^2 U_c^2\left(\frac{M^2 P_{c0}\pi W}{4w}+\frac{\pi W}{8\sqrt{2}\,w\rho}\right)=\frac{\alpha^2 U_c^2 \pi}{4}\times$$
$$\times\frac{W}{w}\left(M^2 P_{c0}+\frac{1}{2\sqrt{2}\,\rho}\right). \qquad (2.93)$$

Здесь нет полезного сообщения. Фактически здесь имеем спектр сложной помехи.

*Общее выражение для мощности сообщения и шума на выходе АМ приемника, получаемое по «методу вероятностных весов».*

Применяя «метод вероятностных весов» и используя (2.80) и (2.93), получим

$$P = \alpha^2 U_c^2\left[\left(M^2 P_{c0}+\frac{W}{\rho\, w}\right)(1-e^{-\rho})+\left(\frac{\pi M^2 P_{c0}}{4}\,\frac{W}{w}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\pi}{8\sqrt{2}\,\rho}\,\frac{W}{w}\right)e^{-\rho}\right]. \qquad (2.94)$$

Полезное сообщение и шум будут

$$P_{\text{св}} = \alpha^2 U_c^2 M^2 P_{c0}(1-e^{-\rho}),$$
$$P_{\text{шв}} = \alpha^2 U_c^2\left[\frac{W}{w\,\rho}(1-e^{-\rho})+\frac{\pi M^2 P_{c0}}{4}\,\frac{W}{w}\,e^{-\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{8\sqrt{2}\,\rho}\,\frac{W}{w}\,e^{-\rho}\right]. \qquad (2.95)$$

Тогда отношение сообщение/шум можно получить в виде

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{w}{W} \frac{M^2 P_{c0}\,\rho}{1 + \frac{\pi}{8\sqrt{2}\,(e^{\rho}-1)} + \frac{\pi M^2 P_{c0}}{4} \frac{\rho}{e^{\rho}-1}}. \quad (2.96)$$

Возьмем $M=1$, $w/W=2$, $P_{c0}=1/2$ и, считая, что сообщение — простое синусоидальное колебание, получим

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{\rho}{1 + \frac{\pi}{8\sqrt{2}\,(e^{\rho}-1)} + \frac{\pi}{8} \frac{\rho}{e^{\rho}-1}}. \quad (2.97)$$

Уже при $\rho \geqslant 1$ можно пренебречь вторым и третьим членами в знаменателе (2.97) по сравнению с единицей, и тогда $P_{св}/P_{шв} \approx \rho$.

Таким образом, соотношение (2.97) наглядно показывает, что только при $\rho < 1$ может возникнуть ситуация, подобная пороговой.

При $\rho \ll 1$, как следует из (2.97),

$$P_{св}/P_{шв} \approx 2\rho^2/(0{,}55 + 2{,}78\rho). \quad (2.98)$$

Таким образом, АМ система не имеет порога при встречающихся практических значениях $\rho$.

С помощью «метода вероятностных весов» успешно решены задачи по помехоустойчивости и определению порога более сложных систем, таких, например, как ЧМ системы с ОСЧ [11] и со следящим гетеродином [13].

Следует отметить, что анализ помехоустойчивости различных систем осуществляется всегда при условии, что помехи, поступающие на приемник, относятся к гладким флуктуационным помехам, подчиняющимся нормальному закону распределения вероятностей. При анализе влияния шумов, подчиняющихся другим законам, можно применить тот же метод, в том же порядке, но результаты будут, естественно, другие.

## 2.4. ПРИМЕНЕНИЕ «МЕТОДА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ВЕСОВ» К ОЦЕНКЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ

Применение для таких систем «метода вероятностных весов» имеет свою специфику. Эту специфику здесь и хотим показать на примере анализа системы связи с ВИМ (времяимпульсной модуляцией).

Сущность этой специфики кратко можно пояснить следующим образом.

Как известно [2], в системах связи, использующих, например, ДИМ (импульсную модуляцию по длительности) и ВИМ, шумовая составляющая сообщения на выходе приемника имеет два компонента. Один компонент определяется смещением (флуктуацией) краев импульса помехой. Другой появляется от того, что при достаточно большом уровне помех, превышающем определенный пороговый уровень, могут появиться ложные импульсы, а часть полезных импульсов, несущих передаваемое сообщение, пропадает. В системах со стробированием на приеме, когда приемник открыт лишь на время ожидаемого прибытия полезного импульса и закрыт в остальное время, имеет значение лишь компонент шума от пропадания импульсов, несущих сообщение. Как показывает анализ, одновременно с ростом этого компонента шума снижается эффективная мощность полезного сообщения. Отсюда следует, что вероятность пропадания полезных импульсов и определяет роль одного и другого компонента шума и величину сообщения. Эта вероятность и должна поэтому использоваться в «методе вероятностных весов» вместо $P(\kappa_ш < 1)$ или $P(\kappa_ш > 1)$. Очевидно, эта вероятность может быть записана:

$$q = P(U_с + U_ш < U_{пор}), \qquad (2.99)$$

где $U_с$ — напряжение полезного сигнала на входе дискриминатора импульсного детектора приемника; $U_ш$ — напряжение помехи на том же входе и $U_{пор}$ — пороговый уровень.

Если $U_с + U_ш < U_{пор}$, импульс на выходе дискриминатора не появляется. Если $U_с + U_ш > U_{пор}$, импульс на выходе появляется. Так как полная система событий содержит только два события — появление и непоявление импульсов, то вероятность появления импульсов будет равна $1 - q$.

Подробный вывод соотношений, характеризующих помехоустойчивость импульсных систем, можно найти в [2, 3] и др. Здесь будем использовать в основном работу [27], которая изменена и далее развита в [2] (гл. 12 и 14).

*Случай слабой помехи.* Рассмотрим сначала лишь случай относительно слабой помехи, когда величиной вероятности $q$ можно пренебречь и влияние помехи проявляется лишь в смещении краев импульса. Данное рассмотрение относится как к системе ДИМ, так и ВИМ, при которой обычно имеет место на приеме сначала преобразование ВИМ в ДИМ, а затем уже извлечение по-

лезного сообщения путем пропускания модулированных импульсов через НЧ фильтр.

Закон распределения вероятностей временно́го смещения краев импульса может быть различным в зависимости от вида помехи, но, как доказывается, при любом распределении справедлива следующая формула для расчета мощности шума на выходе приемного демодулятора:

$$P_{\text{шв1}} = 2WpU_0^2 D[x]. \tag{2.100}$$

Здесь $W$ — полоса НЧ фильтра на выходе демодулятора; $p$ — тактовая частота; $U_0$ — высота (амплитуда) импульсов и $D[x]$ — дисперсия смещения края импульса помехой.

Учитывая, что помехой, смещающей край импульса, является флуктуационный шум на входе приемника, можно показать [2], что

$$D[x] = \frac{\sigma_0^2 w}{\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_0^2} = \frac{P_{\text{ш}}}{\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_0^2}. \tag{2.101}$$

В этой формуле значение производной берется в точке ограничения, которая обычно выбирается на уровне максимальной крутизны края импульса.

Формулы (2.100) и (2.101) справедливы при смещении одного края импульса, что обычно имеет место при ВИМ, так как в результате преобразования ВИМ в ДИМ другой край импульса, модулированного по длительности, фиксируется. Если импульсы после ограничителя представляют собой лишь исправленные импульсы, модулированные по длительности, то помеха может воздействовать на оба края импульса. При ДИМ импульсы берутся достаточно широкими, поэтому, рассматривая помеху в виде флуктуационного шума, можно считать, что оба края импульса смещаются независимо. В этом случае мощность шума равна удвоенной мощности, вычисляемой по ф-ле (2.100).

Подставив (2.101) в (2.100), получим

$$P_{\text{шв}} = \frac{2WpU_0^2 P_{\text{ш}}}{\left(\partial U/\partial t\right)_0^2}. \tag{2.102}$$

В практике удобно использовать видоизмененную формулу, которую получим, умножив числитель и знаме-

натель в (2.102) на $P_c \tau_0^2$, где $P_c$ — средняя мощность поступающей на приемник импульсной последовательности; $\tau_0$ — длительность немодулированного импульса при ДИМ:

$$P_{шв_1} = WNp^2U_0^2\tau_0^2/\kappa_ф \rho, \tag{2.103}$$

где $\rho = P_c/P_ш$ на входе приемника; $\kappa_ф$ — коэффициент формы импульса:

$$\kappa_ф = \tau_0^2\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_0^2 \Bigg/ \int_0^{\tau_0} U^2(t)\,dt, \tag{2.104}$$

если учесть, что средняя мощность входного импульса сигнала

$$P_c = \frac{Np}{2}\int_0^{\tau_0} U^2(t)\,dt, \tag{2.105}$$

где $N$ — число индивидуальных каналов системы.

Амплитуда полезного сообщения на выходе НЧ фильтра

$$U_{св1} = U_0 pM\tau_0 \tag{2.106}$$

и мощность

$$P_{св1} = \frac{U_{св1}^2}{2} = \frac{U_0^2 p^2 M^2 \tau_0^2}{2}. \tag{2.107}$$

Складывая (2.107) и (2.103), получим мощность смеси сигнала и шума на выходе приемника при условии относительно малых шумов, действующих лишь на смещение краев импульсов:

$$P_{\Sigma_1} = P_{св1} + P_{шв1} = U_0^2 p^2 M^2 \tau_0^2/2 + WNp^2U_0^2\tau_0^2/\kappa_ф \rho. \tag{2.108}$$

Отношение $P_{св1}/P_{шв1}$ будет

$$P_{св1}/P_{шв1} = \kappa_ф M^2 \rho/2NW. \tag{2.109}$$

*Случай большой помехи.* Наличие большой помехи приведет не только к смещению краев импульсов, но может вызвать пропадание части сигнальных импульсов и появление лишних, ложных импульсов в промежутках между сигнальными импульсами. Имея в виду синхронизированную систему приема, в которой ложные промежуточные импульсы не принимаются, дополнительные шумы на выходе приемника обусловливаются лишь про-

падением части сигнальных импульсов. В этом случае мощности [2] сообщения и шума будут иметь значения:

$$P_{св2} = 0{,}5U_0^2 p^2 M^2 \tau_0^2 (1-q)^2, \tag{2.110}$$

$$P_{шв2} = 2Wp\tau_0^2 U_0^2 q(1-q). \tag{2.111}$$

Легко убедиться, что относительное значение этих шумов очень велико. Действительно, из (2.110) и (2.111) получим

$$P_{св2}/P_{шв2} = (pM^2/4W)(1-q)/q. \tag{2.112}$$

Пусть $M=1$, $p/W=3$ и $q \ll 1$. Тогда

$$P_{св2}/P_{шв2} \approx 3/4q. \tag{2.113}$$

Для междугородной связи норма на это отношение равна $\sim 52$ дБ.

Тогда из (2.113) находим, что эта норма может быть обеспечена лишь при $q \approx 2{,}5 \cdot 10^{-6}$, т. е. должно пропадать не более 2,5 импульса из миллиона.

Сравнивая соотношения (2.107) и (2.110), видим, что при $q \to 0$ ф-ла (2.110) переходит в (2.107), т. е. ф-ла (2.110) является более общей, отображая подавление полезного сообщения при большом шуме.

Как показано в [27] и [2], выпадение части $q$ импульсов снижает мощность автокорреляционных импульсов в $(1-q)^2$ раз, что показано в ф-ле (2.110). Учитывая это и принцип вероятностных весов, следует ввести множитель $(1-q)^2$ и в ф-лу (2.103). Тогда можно записать следующее соотношение для суммарной мощности сообщения и шума на выходе приемника:

$$P_\Sigma = (P_{св1} + P_{шв1})(1-q)^2 + P_{шв2} = \frac{U_0^2 p^2 M^2 \tau_0^2}{2}(1-q)^2 +$$

$$+ \frac{WNp^2 U_0^2 \tau_0^2}{\kappa_ф \rho}(1-q)^2 + 2WpU_0^2 \tau_0^2 q(1-q). \tag{2.114}$$

Первый член этой формулы дает мощность полезного сообщения, а два других члена — шум. Отношение мощностей сообщение / шум будет

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{M^2 \rho}{\frac{2WN}{\kappa_ф} + \frac{4W\rho q}{p(1-q)}}. \tag{2.115}$$

Из этой формулы видно, что если вероятность $q$ очень мала, тогда $P_{св}/P_{шв}$ пропорционально $\rho$, равному

отношению мощностей сигнал/шум на входе дискриминатора приемника.

Величины $q$ и $\rho$ взаимосвязаны, поэтому целесообразно выявить эту связь, чтобы получить зависимость $P_{св}/P_{шв}$ только от одного параметра $\rho$.

*Связь вероятности $q$ с $\rho$.* Согласно Райсу [28] вероятность пропадания импульсов (2.99)

$$q = P(U_с + U_ш < U_{пор}) = e^{-\frac{u^2+c^2}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{u}{c}\right)^i I_i(c, u) \quad (2.116)$$

где $I_i(x)$ — модифицированная функция Бесселя; $c \approx \sqrt{P_{с\,пик}/P_ш}$, $u = hc = h\sqrt{P_{с\,пик}/P_ш}$ и $h = U_{пор}/U_с$ относительный уровень ограничения (относительный пороговый уровень). Подставив значения $c$ и $u$ в (2.116), получим

$$q = e^{-\frac{1+h^2}{2}\frac{P_{с\,пик}}{P_ш}} \sum_{i=1}^{\infty} h_i I_i\left(h\frac{P_{с\,пик}}{P_ш}\right). \quad (2.117)$$

Так как в практике обычно всегда $h = (P_{с\,пик}/P_ш) \gg 1$, то можем воспользоваться асимптотическим выражением для $I_i(x)$ при $x \gg 1$: $I_i(x) = e^x/\sqrt{2\pi x}$, тогда

$$I_i\left(h\frac{P_{с\,пик}}{P_ш}\right) = \frac{e^{h\frac{P_{с\,пик}}{P_ш}}}{\sqrt{2\pi h\frac{P_{с\,пик}}{P_ш}}}.$$

Подставив это соотношение в (2.117), получим

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(1-h)^2}{2}\frac{P_{с\,пик}}{P_ш}}}{\sqrt{\frac{P_{с\,пик}}{P_ш}}} \sum_{i=1}^{\infty} h^{i-\frac{1}{2}}. \quad (2.118)$$

Так как $h < 1$, то $\sum_{i=1}^{\infty} h^{i-\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} h^i = \frac{\sqrt{h}}{1-h}$.

Кроме того, введем преобразование $P_{с\,пик}/P_ш = (P_{с\,пик}/P_с) \cdot (P_с/P_ш) = \kappa\rho$, где $\kappa = P_{с\,пик}/P_с$ есть пик-фактор сигнала, т. е. отношение его пиковой мощности к средней. При этих соотношениях вместо (2.118) получим

$$q = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2\pi}(1-h)} \cdot \frac{e^{-\frac{(1-h)^2}{2}\kappa\rho}}{\sqrt{\kappa\rho}}. \qquad (2.119)$$

Эту формулу кратко можно записать так:

$$q = A e^{-B\rho}/\sqrt{\rho}, \qquad (2.120)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{h}/\sqrt{2\pi\kappa}(1-h), \\ B &= 0{,}5(1-h)^2\kappa. \end{aligned}\right\} \qquad (2.121)$$

Таким образом, связь вероятности $q$ с $\rho$ определена и можно вернуться к соотношению (2.115).

*Окончательное соотношение для* $P_{св}/P_{шв}$. Подставив в ф-лу (2.115) значение $q$ из (2.120), получим

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{M^2\rho}{\frac{2WN}{\kappa_ф} + \frac{4W\rho A e^{-B\rho}}{p(\sqrt{\rho} - A e^{-B\rho})}}. \qquad (2.122)$$

Выведем также соотношение, необходимое для расчета пикфактора $\kappa$. Так как $P_{с\,пик} = 0{,}5U_0^2$ и $P_с = 0{,}5Np\int_0^{\tau_0} U^2(t)\,dt$, где $U(t)$ — огибающая импульсов, то

$$\kappa = P_{с\,пик}/P_с = (1/pN)\left(U_0^2 \Big/ \int_0^{\tau_0} U^2(t)\,dt\right). \qquad (2.123)$$

Для прямоугольных импульсов $\int_0^{\tau_0} U_0^2 dt = U_0^2\tau_0$, и тогда

$$\kappa = 1/Np\tau_0. \qquad (2.124)$$

Для треугольного импульса получим

$$\kappa = 3/Np\tau_0. \qquad (2.125)$$

*Пример расчета зависимости* $P_{св}/P_{шв} = f(\rho)$. Произведем расчет для треугольных импульсов 24-канальной импульсной системы с параметрами: $M=1$; $p=8\cdot10^3$ Гц; $N=24$; $W=3{,}4$ кГц; $\tau_0=2\cdot10^{-6}$ с; $h=0{,}5$.

Вычисления дают:

$\kappa_ф = 12/\tau_0 = 6\cdot10^6$, $A = 1/\pi\kappa \approx 5$, $\kappa = 3/Np\tau_0 = 8$, $B=1$.

Тогда

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} \approx \frac{\rho}{27\cdot 10^{-3} + \dfrac{8\rho}{\sqrt{\rho}\, e^{\rho} - 5}}. \qquad (2.126)$$

При $\rho \geqslant 4$ можно взять упрощенное соотношение

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} \approx \frac{\rho}{27\cdot 10^{-3} + 8\sqrt{\rho}\, e^{-\rho}}. \qquad (2.127)$$

Следует учитывать, что ф-лы (2.122), (2.126) и (2.127) справедливы только при относительно большом $\rho$, по крайней мере, при $\rho \geqslant 2$, так как только при этом условии можно считать, что $h(P_{спик}/P_{ш}) \gg 1$.

Результаты расчета представлены на рис. 2.4. При взятых условиях пороговое значение $\rho$ лежит в пределах

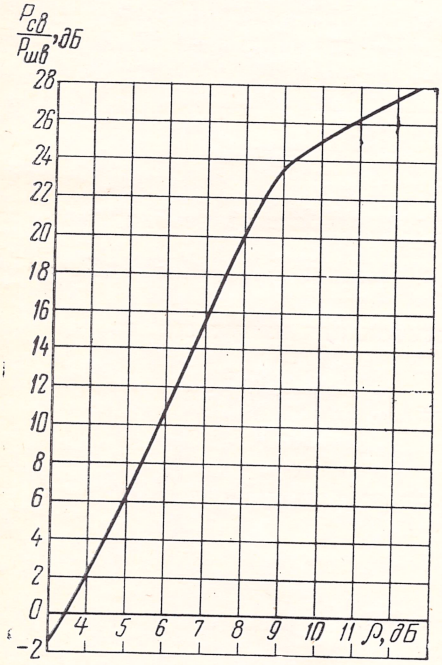


Рис. 2.4

9—11 дБ, что соответствует известным экспериментальным данным.

Выведенные в настоящем параграфе соотношения могут быть несколько уточнены путем учета АЧХ трактов УВЧ и УПЧ, но эти уточнения не дают существенных поправок.

# ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ПО МЕТОДУ НУЛЕВОГО ОТКЛОНЕНИЯ

## 3.1. ОБОСНОВАНИЕ УСЛОВИЯ НУЛЕВОГО ОТКЛОНЕНИЯ

В теории потенциальной помехоустойчивости В. А. Котельниковым [31] показано, что в идеальном приемнике обеспечивается минимум среднеквадратичного отклонения:

$$\langle [\varkappa(t) - A_U(t)]^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\varkappa(t) - A_U(t)]^2 \, dt. \qquad (3.1)$$

В этом выражении

$$\varkappa = A(t, U_0) + N(t), \qquad (3.2)$$

где $A(t, U_0)$ — полезный сигнал на входе приемника, промодулированный сообщением $U_0 = U_0(t)$, и $N(t)$ — флуктуационный шум на входе приемника.

$A_U(t) = A(t, U)$ формально выражается, как и полезный сигнал, на входе приемника с той разницей, что он модулирован сообщением $U = U(t)$ на выходе приемника, включающим в себя и шум.

Доказав условие минимума (3.1), В. А. Котельников не делает его исходным для вычисления $U(t)$. Он находит сообщение на выходе идеального приемника и соответственно составляющую шума на выходе иным способом. Задача практически решается им до получения конкретных формул для расчета шумов в случае малых относительных значений флуктуационных шумов на входе приемника. Однако, очевидно, что, по крайней мере, формально математически можно искать условие минимума интеграла (3.1) без наложения каких-либо ограничений на величину шумов и на их физические свойства. Это означает, что условие минимума интеграла (3.1) можно взять в качестве исходного условия для идеального приема при воздействии на сигнал любого вида помех.

Нахождение подынтегральной функции, обеспечивающей минимум определенного интеграла, является, как известно, задачей вариационного исчисления. Не налагая никаких других ограничений на подынтегральную функцию, кроме требуемых вариационным исчислением, можно найти общее решение.

Известно [32], что условиями получения экстремума интеграла вида

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \Phi[\varphi(t),\ \psi(t),\ \varphi'(t),\ \psi'(t)]\,dt \tag{3.3}$$

являются соотношения

$$\left.\begin{aligned} \partial\Phi/\partial x - d/dt\,(\partial\Phi/\partial x') = 0,\\ \partial\Phi/\partial y - d/dt\,(\partial\Phi/\partial y') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} x = \varphi(t),\\ y = \psi(t) \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

— параметрическое представление искомой линии, а $x' = \varphi'(t)$ и $y' = \psi'(t)$ — производные по параметру $t$.

В нашем случае

$$\Phi(t) = [\varkappa(t) - A_U(t)]^2, \tag{3.6}$$

и применительно к воздействию флуктуационных помех нас интересует связь между

$$x = N(t) \text{ и } y = U(t),$$

где $N(t)$ — флуктуационная помеха; $U(t)$ — искомая функция, воспроизводимая приемником.

Поскольку в данной задаче функция $\Phi(t)$ не зависит явно от $x' = N'(t)$ и $y' = U'(t)$, то условия (3.4) примут вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}. \tag{3.7}$$

Применяя условия (3.7) к функции (3.6), которая в более развернутой форме равна

$$\Phi(t) = [A(t,\ U_0) + N(t) - A(t,\ U)]^2, \tag{3.8}$$

получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial N} = 2[A(t,\ U_0) + N(t) - A(t,\ U)] = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial U} = 2[A(t,\ U_0) + N(t) - A(t,\ U)]\frac{\partial A(t,\ U)}{\partial U} = 0.$$

Отсюда видно, что условием минимума интеграла (3.1) в самом общем случае является условие

$$A(t,\ U_0) + N(t) - A(t,\ U) = 0. \tag{3.9}$$

Это условие и будем называть условием нулевого отклонения. Представляется, что полученный результат является справедливым, по крайней мере, для конечного, хотя и большого интервала $T$ в (3.1). Кроме того, он представляется физически понятным в качестве приближения, по крайней мере, для случая сопоставимых значений величин сигнала и помехи. Чтобы оценить реальные пределы его применимости, следует вывести из условия (3.9) формулы для расчета шумов на выходе приемника и результаты расчета по этим формулам сравнить с таковыми по ранее известным теоретическим формулам и с экспериментальными данными, что и выполняется далее.

### 3.2. МАЛЫЕ ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ШУМЫ

Получим из (3.9) исходную формулу В. А. Котельникова, справедливую для малых флуктуационных шумов.

Положим

$$A(t,\ U) = A(t,\ U_0 + \Delta U), \tag{3.10}$$

где $\Delta U$ — приращение модулирующего сообщения за счет малых относительных шумов на входе приемника. Так как в этом случае, как правило, $\Delta U$ тоже мало относительно $U_0$, то, положив приближенно

$$A(t,\ U_0 + \Delta U) = A(t,\ U_0) + \Delta U A'_{U_0}(t,\ U_0) \tag{3.11}$$

и подставив это в условие (3.9), найдем

$$N(t) - \Delta U A'_{U_0}(t,\ U_0) = 0$$

и, таким образом,

$$\Delta U = N(t)/A'_{U_0}(t,\ U_0). \tag{3.12}$$

Так как $N(t)$ и $A(t,\ U_0)$ — независимые функции времени, то можно усреднить $\Delta U$ поочередно и раздельно, откуда и получим, что

$$\Delta U_c = N(t) \Big/ \sqrt{<\left(\frac{\partial A}{\partial U_0}\right)^2>}, \tag{3.13}$$

где $\Delta U_c$ — означает усреднение только по производной сигнала.

Из (3.13) вытекает, что спектр мощности $\Delta U_c$ есть спектр мощности $N(t)$, деленный на постоянную величину $<(dA/dU_0)^2>$, т. е.

$$\sigma^2_{шв} = \sigma^2_ш \Big/ <\left(\frac{\partial A}{\partial U_0}\right)^2>. \tag{3.14}$$

Выражение (3.14) и было найдено Котельниковым, в нем $\sigma^2_ш$ — интенсивность спектра шумов на входе приемника, а $\sigma^2_{шв}$ — интенсивность спектра шумов на выходе идеального приемника. Далее найдем несколько иное соотношение для малых шумов из рассмотрения более общего случая произвольных по величине шумов.

### 3.3. БОЛЬШИЕ ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ШУМЫ

Теперь найдем значение $\Delta U$ из (3.9), не делая допущений относительно малости шумов. В этом случае удобно решать задачу для различных видов модуляции.

*АМ (амплитудная модуляция).* Для данного вида модуляции можно написать с учетом (1.38):

$$\left.\begin{aligned} &A(t,\ U_0) = A_0(1 + MU_0)\sin(\omega_0 t + \alpha);\\ &A(t,\ U) = A_0(1 + MU_0 + M\Delta U)\sin(\omega_0 t + \alpha);\\ &N(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

причем

$$U_ш = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{3.16}$$

— огибающая шумов в полосе приемника.

Подставив соотношения (3.15) в (3.9), получим

$$A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = A_0 M\Delta U\sin\alpha\cos\omega_0 t +$$
$$+ A_0 M\Delta U\cos\alpha\sin\omega_0 t.$$

Это равенство должно выполняться для любого момента времени, поэтому $A = A_0 M\Delta U\sin\alpha$, $B = A_0 M\Delta U\cos\alpha$. Возводя эти равенства в квадрат и складывая с учетом (3.16), получим

$$\Delta U_{АМ} = U_ш/MA_0. \tag{3.17}$$

Отсюда следует, что спектр мощности $\Delta U_{АМ}$ — это спектр мощности огибающей флуктуационных колебаний шумов, уменьшенный в каждой точке в $M^2A_0^2$ раз, т. е.

$$G_{шв}(F) = G_{U_ш}(F)/M^2A_0^2. \tag{3.18}$$

Спектр огибающей можно найти, вычислив сначала коэффициент корреляции огибающей. В соответствии с [1] коэффициент корреляции огибающей

$$R_{ш}(\tau) = \frac{\pi}{4-\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 p^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 p^4 + \ldots\right]. \qquad (3.19)$$

Ограничиваясь для упрощения первым членом разложения в (3.19), получим

$$R_{ш}(\tau) \approx \frac{\pi}{4(4-\pi)} p^2, \qquad (3.20)$$

где

$$p = r(\tau) = \sin \pi w \tau / \pi w \tau \qquad (3.21)$$

при идеально прямоугольной форме частотной характеристики приемника с шириной $w$, Гц.

Тогда спектр флуктуаций с учетом (3.18) будет

$$G_{шв}(F) = \frac{4\sigma^2}{A_0^2 M^2}\int_0^{\infty} R_{ш}(\tau)\cos\Omega\tau\, d\tau = \frac{\pi\sigma^2}{(4-\pi)A_0^2 M^2} \times$$

$$\times \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin \pi w \tau}{\pi w \tau}\right)^2 \cos\Omega\tau\, d\tau = \frac{\pi\sigma^2}{2(4-\pi)A_0^2 M^2 w}\left(1 - \frac{F}{w}\right). \qquad (3.22)$$

Пусть сообщение занимает полосу в пределах $0—F_m$, тогда мощность шума в этой полосе

$$P_{шв} = \frac{\pi\sigma^2 F_m}{2(4-\pi)A_0^2 M^2 w}\left(1 - \frac{F_m}{2w}\right). \qquad (3.23)$$

В АМ системах обычно $w \approx 2F_m$. Учитывая это,

$$P_{шв} \approx \frac{3\pi\sigma^2}{16(4-\pi)A_0^2 M^2}.$$

Пусть мощность полезного сообщения на выходе равна $P_{св}$, тогда

$$P_{св}/P_{шв} = 16(4-\pi)A_0^2 M^2 P_{св}/3\pi\sigma^2. \qquad (3.24)$$

Учитывая, далее, что на входе приемника $P_{ш} = 2\sigma^2$, $P_c = 0{,}5A_0^2(1 + 0{,}5M^2)$ и $\rho = P_c/P_{ш}$.

Из (3.24) получим

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{64(4-\pi)M^2 P_{св}\rho}{3\pi(1+0{,}5M^2)}. \qquad (3.25)$$

Взяв частный случай, когда сообщение является простым синусоидальным колебанием ($U_0 = \cos\Omega t$), мощность которого равна 0,5, получим

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{32(4-\pi)M^2\rho}{3\pi(1+0{,}5M^2)}. \qquad (3.26)$$

При $M=1$ выигрыш $B = \frac{32(4-\pi)}{3\pi \cdot 1{,}5} \approx 1{,}94$.

Реальные системы, такие, как АМ-ОБ или АМ с подавленной несущей, дают выигрыш около 2, т. е. вычисленный нами результат весьма точно совпадает с экспериментально наблюдаемым результатом.

Нетрудно найти выигрыш $B$ для многоканального сообщения с мощностью $P_{св} = G_0 W$.

Экспериментально также хорошо подтверждается частотная зависимость плотности мощности в виде (3.22). Слабая зависимость $G_ш(F)$ от частоты наблюдается только при малых значениях $F/w$. Таким образом, решение (3.22) более точно трактует процесс, чем соотношение (3.14), используемое для случая очень малых шумов.

*ФМ (фазовая модуляция).* В этом случае, как известно,

$$A(t,\ U_0) = A\sin(\omega_0 t + \Delta\varphi U_0). \qquad (3.27)$$

Условие (3.9) запишется таким образом:

$$A_0\sin(\omega_0 t + \Delta\varphi U_0) + N(t) - A\sin(\omega_0 t + \Delta\varphi U_0 + \Delta\varphi\Delta U) = 0 \qquad (3.28)$$

Используя для $N(t)$ такое же выражение, как в (3.15), получим

$$A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = A_0[\sin(\Delta\varphi U_0 + \Delta\varphi\Delta U) - \sin(\Delta\varphi U_0)]\cos\omega_0 t + A_0[\cos(\Delta\varphi U_0 + \Delta\varphi\Delta U) - \cos(\Delta\varphi U_0)]\sin\omega_0 t. \qquad (3.29)$$

Так как это равенство должно удовлетворяться для любых $t$, то

$$\left.\begin{aligned} A &= A_0[\sin(\Delta\varphi U_0 + \Delta\varphi\Delta U) - \sin(\Delta\varphi U_0)], \\ B &= A_0[\cos(\Delta\varphi U_0 + \Delta\varphi\Delta U) - \cos(\Delta\varphi U_0)]. \end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

Возводя $A$ и $B$ в квадрат и суммируя, получим

$$U_ш^2 = 4A_0^2\sin^2(\Delta\varphi\Delta U/2).$$

Отсюда $\sin(0{,}5\Delta\varphi\Delta U) = 0{,}5U_ш/A_0$ и, таким образом,

$$\Delta U_{ФМ} = (2/\Delta\varphi)\arcsin(U_ш/2A_0). \qquad (3.31)$$

Таково выражение для шумов на выходе идеального приемника при ФМ в общем случае при любом отношении сигнал/шум на входе.

В большинстве случаев вероятность $U_ш < 2A_0$ велика, т. е. $U_ш/2A_0 < 1$, и тогда с достаточной точностью

$$\Delta U_{ФМ} = U_ш/\Delta\varphi A_0. \qquad (3.32)$$

Как видно, эта формула совершенно аналогична ф-ле (3.17) для АМ. Следовательно, спектр и мощность шума будут определяться соответственно по ф-лам (3.22) и (3.23) с заменой $M$ индексом модуляции $\Delta\varphi$. Таким образом,

$$G_{шв}(F) = \frac{\pi\sigma^2}{2(4-\pi)A_0^2\Delta\varphi^2\omega}\left(1-\frac{F}{\omega}\right); \qquad (3.33)$$

$$P_{шв} = \frac{\pi\sigma^2 F_m}{2(4-\pi)A_0^2\Delta\varphi^2\omega}\left(1-\frac{F_m}{2\omega}\right). \qquad (3.34)$$

Вводя соотношения $P_ш = 2\sigma^2$ и $P_c = A_0^2/2$, получим

$$P_{шв} = \frac{\pi F_m(1-F_m/2\omega)}{8(4-\pi)\Delta\varphi^2\omega\rho}$$

и, далее,

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{8(4-\pi)\Delta\varphi^2\omega P_{св}\rho}{\pi F_m(1-F_m/2\omega)}. \qquad (3.35)$$

При достаточно больших $\Delta\varphi$ $2\omega \gg F_m$. Учтя это и взяв опять синусоидальное сообщение с $P_{св} = 0{,}5$, получим для выигрыша

$$B = \frac{P_{св}}{P_{шв}}\Big/\rho = \frac{4(4-\pi)\Delta\varphi^2\omega}{\pi F_m} \approx \frac{\omega\Delta\varphi^2}{F_m}. \qquad (3.36)$$

Таким образом, и здесь получаем значение выигрыша, совпадающее с известным ранее.

При малом индексе модуляции, например $\Delta\varphi \approx 1$, можно считать, что $\omega/F_m \approx 2$, и тогда $B = 2$, т. е. то же, что при АМ. Однако, взяв большое значение, например $\Delta\varphi \approx 5$, то в этом случае $\omega = 10F_m$, и тогда получаем $B \approx 250$. Таким образом, этот вид модуляции помехоустойчив.

*ЧМ (частотная модуляция)*. В этом случае

$$A(t, U_0) = A_0 \sin\left[\omega_0 t + \Delta\omega_m \int_0^t U_0(t')\,dt'\right]. \quad (3.37)$$

Для получения $\Delta U$ в этом случае надо взять производную от (3.31) и заменить $\Delta\varphi$ на $\Delta\omega_m$, тогда получим

$$\Delta U = \frac{U'_{ш}}{\Delta\omega_m A_0 \sqrt{1 - U_{ш}^2 / 4A_0^2}} \quad (3.38)$$

или приблизительно, учитывая, что $U_{ш} < 2A_0$,

$$\Delta U \approx U'_{ш}/\Delta\omega_m A_0. \quad (3.39)$$

Так как спектр производной от функции получается путем умножения спектра самой функции на $\Omega^2$, тогда из (3.33) получим для ЧМ

$$G_{ш}(F) = \frac{\pi\sigma^2\Omega^2}{2(4-\pi)\Delta\omega_m^2 A_0^2 w}\left(1 - \frac{F}{w}\right). \quad (3.40)$$

В случае $F \ll w$, т. е. при широкополосной связи,

$$G_{ш}(F) \approx \frac{\pi\sigma^2 F^2}{2(4-\pi)\Delta f_m^2 A_0^2 w}. \quad (3.41)$$

Интегрируя в полосе $0 - F_m$ и производя преобразования, аналогичные сделанным для ФМ, получим

$$\frac{P_{св}}{P_{шв}} = \frac{12(4-\pi) w \Delta f_m^2}{\pi F_m^3}\rho. \quad (3.42)$$

Откуда

$$B \approx 3{,}3\, w \Delta f_m^2 / F_m^3. \quad (3.43)$$

Этот выигрыш довольно точно совпадает с вычисляемым для малых шумов другим путем (см., например, [4]).

*ВИМ (время импульсная модуляция)*. В [2] показано, что сигнал при ВИМ может быть представлен следующим образом:

$$A(t, U_0) = \left\{\sum_{n=-\frac{Q}{2}}^{Q/2} U\left[t - nT_т + \Delta\tau_m U_0(nT_т)\right]\right\} \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.44)$$

В соответствии с этой формулой сигнал $A(t. U_0)$ передается в интервале времени $-T/2 < t < T/2$, где время

передачи $T$ достаточно большое по сравнению с периодом повторения импульсов.

В этой формуле $Q=T/T_т=Tf_т$, где $T_т$ — тактовый период; $f_т$ — тактовая частота. Можно допустить, что $Q$ — целое число, так как выбор величины периода работы $T$ зависит от нас. Величина $\Delta\tau_m$ — максимальная девиация импульсов, так как всегда предполагаем, что $-1 \leqslant U_0(t) \leqslant 1$; $U(t)$ — уравнение огибающей высокочастотного импульса, причем $U(t)=0$ при $t<0$ и $t>\tau_0$, где $\tau_0$ — ширина (длительность) импульса; $\omega_0$ — угловая частота высокочастотного сигнала.

Для упрощения дальнейших выкладок запишем сигнал (3.44) в сокращенном виде:

$$A(t,\ U_0)=U_\Sigma(t,\ U_0)\sin(\omega_0 t+\varphi). \tag{3.45}$$

Тогда

$$A(t,\ U)=A(t,\ U_0+\Delta U)=U_\Sigma(t, U_0+\Delta U)\sin(\omega_0 t+\varphi). \tag{3.46}$$

Условие нулевого отклонения (3.9) дает

$$A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t=[U_\Sigma(t, U_0+\Delta U)-$$
$$-U_\Sigma(t\,U_0)]\sin(\omega_0 t+\varphi). \tag{3.47}$$

Рассматривая случай относительно небольших помех, при которых в бóльшую долю времени $\Delta U \ll U_0$ согласно параграфу 3.2, можем взять

$$U_\Sigma(t, U_0+\Delta U)=U_\Sigma(t, U_0)+\Delta U\frac{\partial U_\Sigma(t,\ U_0)}{\partial U_0}.$$

Подставив это соотношение в (3.47), получим

$$A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t=\Delta U U'_{\Sigma U_0}\sin\varphi\cos\omega_0 t+$$
$$+\Delta U U'_{\Sigma U_0}\cos\varphi\sin\omega_0 t.$$

Далее, $A=\Delta U U'_{\Sigma U_0}\sin\varphi$, $B=\Delta U U'_{\Sigma U_0}\cos\varphi$, откуда элементарно находим

$$\Delta U=U_ш/U'_{\Sigma U_0}. \tag{3.48}$$

Величины $U_ш$ и $U'_{\Sigma U_0}$ взаимно независимы и могут усредняться раздельно. Учитывая это, найдем удобное выражение для среднеквадратичного значения $U'_{\Sigma U_0}$. Согласно (3.44) можем записать

$$U'_{\Sigma U_0} = \frac{\partial U_\Sigma(t,\ U_0)}{\partial U_0} = \sum_{n=-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial U_0} = \Delta\tau_m \sum_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Возведя в квадрат и усредняя, получим

$$\langle U'^2_{\Sigma U_0}\rangle = \Delta\tau_m^2 \left\langle \left( \sum_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \right\rangle.$$

Так как все импульсы имеют одинаковую огибающую, то усреднение дает

$$\langle U'^2_{\Sigma U_0}\rangle = \Delta\tau_m^2 Q \left\langle \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \right\rangle = \Delta\tau_m^2 f_\text{т} T \left\langle \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \right\rangle.$$

Но

$$T\left\langle \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \right\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dt = \int_0^\tau \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dt.$$

С учетом этих соотношений ф-ла (3.48) примет вид

$$\Delta U = \frac{U_\text{ш}}{\Delta\tau_m \sqrt{f_\text{т} \int_0^{\tau_0} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dt}}. \qquad (3.49)$$

Эта формула аналогична ф-ле (3.32) с той только разницей, что у них разные знаменатели. Поэтому для плотности энергетического спектра можно применить соотношение (3.33), заменив в нем $A_0^2\Delta\varphi^2$ квадратом знаменателя соотношения (3.49). Таким образом,

$$G_\text{ш}(F) = \frac{\pi\sigma^2\left(1-\frac{F}{w}\right)}{2(4-\pi)\, w\, \Delta\tau_m^2 f_\text{т} \int_0^{\tau_0} \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 dt}. \qquad (3.50)$$

Считая $F/w \ll 1$ и проинтегрировав $G_\text{ш}(F)$ в полосе $F_m - 0 = W$, получим

$$P_{\text{шв}} = \frac{\pi\sigma^2 W}{2(4-\pi)\, w\, \Delta\, \tau_m^2 f_\tau \int\limits_0^{\tau_0} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dt}. \qquad (3.51)$$

Взяв, как обычно, $P_{\text{ш}} = 2\sigma^2$, $P_{\text{св}} = 0{,}5$ (синусоидальное сообщение), получим

$$P_{\text{с}} = \frac{Nf_\tau}{2} \int\limits_0^{\tau_0} U^2(t)\, dt \qquad (3.52)$$

и, исходя из (3.51), легко найдем

$$B = \frac{P_{\text{св}}}{P_{\text{шв}}} \Big/ \rho = \frac{4(4-\pi)\, w\, \Delta\, \tau_m^2}{\pi W N k_\phi \tau_0^2} \approx \frac{w}{W N \kappa_\phi} \left(\frac{\Delta \tau_m}{\tau_0}\right)^2. \qquad (3.53)$$

Здесь

$$\kappa_\phi = \frac{\int\limits_0^{\tau_0} U^2(t)\, dt}{\tau_0^2 \int\limits_0^{\tau_0} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dt} \qquad (3.54)$$

есть коэффициент, зависящий только от формы сигнала.

Таким образом, предельный выигрыш, вычисляемый по нашему методу, вдвое превышает выигрыш, определяемый по старому методу (см. [2]).

### 3.4. ОЦЕНКА ИСКАЖЕНИЙ ПРИ МНОГОЛУЧЕВОМ ПРИЕМЕ

«Метод нулевого отклонения», сводящийся к использованию соотношения (3.9), можно применить к оценке искажений при многолучевом приеме. Действительно, теоретически законно и физически убедительно принять выражение (3.1) и соответственно (3.9) в качестве условия идеального приема не только при флуктуационных шумах, но и при любых других шумах и искажениях. Возможность этого уже была нами показана в [30].

*Искажения в системах с АМ.* Применим соотношение (3.9) для вычисления минимально возможной величины искажений на выходе приемника при многолучевом приеме в системах с АМ.

Суммарный многолучевой сигнал, поступающий на вход приемника, можно в общем виде обозначить так:

$$f_{\Sigma}(t) = A_m \sum_{i=1}^{n} \kappa_i f(t + \tau_i). \tag{3.55}$$

где $A_m$ — амплитуда луча с максимальной интенсивностью; $\kappa_i = A_i/A_m \leqslant 1$ — отношение амплитуды $i$-го луча к максимальной; $\tau_i$ — время запаздывания для $i$-го луча; $f(t+\tau_i)$ — функция, отображающая модулированное колебание.

Когда на вход приемника поступает сигнал одного луча, то, как известно, искажений нет. Спектр пришедшего сигнала будет точно соответствовать спектру, излучаемому антенной передатчика. Влияние флуктуационных и других независимых шумов при этом не рассматривается, как это делалось в предыдущих параграфах данной главы. Здесь оценим искажения, появляющиеся лишь оттого, что на вход приемника пришло $n$ лучей. Поэтому условие нулевого отклонения (3.9) для исследуемых здесь искажений может быть взято в виде

$$A_{\Sigma}(t,\ U_0) - A(t,\ U) = 0. \tag{3.56}$$

Здесь $A_{\Sigma}(t,\ U_0)$ — многолучевой сигнал на входе приемника; $A(t,\ U)$ — многолучевой сигнал, когда все лучи не сдвинуты по фазе, но промодулированы искаженным сообщением $U = U_0 + \Delta U$. Эти сигналы для АМ запишутся следующим образом с учетом лишь относительных амплитуд $\kappa_i$:

$$\left.\begin{aligned} A_{\Sigma}(t,\ U_0) &= \sum \kappa_i\ (1 + MU_{0i}) \sin(\omega_0 t + \delta_i), \\ A(t,\ U) &= (1 + MU_0 + M\Delta U) \sin(\omega_0 t + \delta_0) \sum \kappa_i. \end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

Здесь обозначено $U_{0i} = U_0(t+\tau)$, $\delta_i = \omega_0 \tau_i$ — сдвиг фаз по высокой частоте отдельных лучей.

Из условия, что соотношение (3.56) должно выполняться при любом значении $t$, найдем

$$\sum \kappa_i (1 + MU_{0i}) \cos\delta_i = (1 + MU_0 + M\Delta U) \cos\delta_0 \sum \kappa_i,$$

$$\sum \kappa_i (1 + MU_{0i}) \sin\delta_i = (1 + MU_0 + M\Delta U) \sin\delta_0 \sum \kappa_i.$$

---

[1]) Для сокращения записи далее нигде не будем указывать пределов суммирования от $i=1$ до $i=n$.

Возводя в квадрат оба равенства и складывая, исключим $\delta_0$ и получим соотношение для определения $\Delta U$:

$$\Delta U = -\left(U_0 + \frac{1}{M}\right) + \frac{\sqrt{\left[\sum \kappa_i (1 + M U_{0i}) \cos \delta_i\right]^2 + \left[\sum \kappa_i (1 + M U_{0i}) \sin \delta_i\right]^2}}{M \sum \kappa_i}. \tag{3.58}$$

Можно упростить это соотношение, считая, что для всех лучей (всех $i$) $U_{0i} = U_0$, учитывая, что $\tau_i$ мало по сравнению с минимальным периодом составляющей сообщения. Тогда получим

$$\Delta U \approx -\left(U_0 + \frac{1}{M}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j \sin^2\left(\frac{\delta_j - \delta_i}{2}\right)}{\left(\sum \kappa_i\right)^2}. \tag{3.59}$$

Это соотношение подтверждает, прежде всего, тот факт, что $\Delta U = 0$, когда все $\kappa_i$ равны нулю, кроме одного, или когда фазы всех лучей одинаковы ($\delta_j = \delta_i$).

Если усреднить по фазам, тогда

$$\langle \Delta U \rangle = \left(U_0 + \frac{1}{M}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j}{2\left(\sum \kappa_i\right)^2}. \tag{3.60}$$

Суммарное сообщение на выходе приемника будет

$$U = U_0 + \Delta U = U_0 \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j \sin^2\left(\frac{\delta_j - \delta_i}{2}\right)}{\left(\sum k_i\right)^2}\right] + \frac{1}{M} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j \sin^2\left(\frac{\delta_j - \delta_i}{2}\right)}{\left(\sum \kappa_i\right)^2}. \tag{3.61}$$

Это выражение указывает на то, что *влияние многолучевости проявляется в системах с АМ в изменении интенсивности (громкости) принимаемого сообщения и в*

*появлении дополнительных низкочастотных компонент, характеризуемых вторым членом в (3.61)*. Спектральный состав сообщения $U_0$ не изменяется.

*Искажения в системах с ЧМ.* Оценка величины этих искажений и их характера в случае ЧМ систем связи представляется особенно важной. Дело в том, что ЧМ применяется в системах тропосферной УВЧ связи, получившей широкое применение, а тропосферный канал связи является наиболее ярким примером многолучевого канала с относительно большим числом лучей. Многолучевость проявляется и в наземных радиорелейных системах связи, использующих в большинстве случаев ЧМ.

Как убедимся из анализа влияния многолучевости в этом случае, многолучевой канал может рассматриваться как линейный четырехполюсник, через который проходит передаваемое *низкочастотное* модулирующее сообщение. Комплексный коэффициент передачи или переходная функция этого четырехполюсника зависят от характера многолучевости и могут быть оценены. Такой результат существенным образом упрощает анализ искажений.

Как и для систем с АМ, начинаем анализ с записи выражений для $A_\Sigma(t, U_0)$ и $A(t, U)$, входящих в условие нулевого отклонения (3.56). Как нетрудно убедиться,

$$\left.\begin{aligned} A_\Sigma(t, U_0) &= \sum \kappa_i \sin[\omega_0 t + \Delta\omega_m S(t+\tau_i) + \delta_i], \\ A(t, U) &= \sum \kappa_i \sin[\omega_0 t + \Delta\omega_m S_\Sigma(t)]. \end{aligned}\right\} \qquad (3.62)$$

В этих соотношениях

$$S(t+\tau_i) = \int_0^t U_0(t'+\tau_i)\,dt', \quad S_\Sigma(t) = \int_0^t U_\Sigma(t')\,dt',$$

где $U_0(t)$ — передаваемое сообщение; $U_\Sigma(t)$ — передаваемое сообщение, образующееся на выходе идеального приемника, вместе с искажениями; $\delta_i = \omega_0\tau_i$ — сдвиг фазы на ВЧ вследствие запаздывания $i$-го луча; $\omega_0$ — несущая угловая частота.

С учетом (3.62) соотношение (3.56) в несколько развернутом виде запишем как

$$\sum \kappa_i \cos[\Delta\omega_m S(t+\tau_i) + \delta_i] \sin\omega_0 t +$$

$$+ \sum \kappa_i \sin[\Delta\omega_m S(t+\tau_i) + \delta_i] \cos\omega_0 t =$$

$$= \sum \kappa_i \cos [\Delta \omega_m S_\Sigma (t)] \sin \omega_0 t +$$

$$+ \sum \kappa_i \sin [\Delta \omega_m S_\Sigma (t)] \cos \omega_0 t.$$

Из условия соблюдения этого равенства при любом значении $t$ получаем

$$\left.\begin{aligned} \sin [\Delta \omega_m S_\Sigma (t)] \sum k_i &= \sum \kappa_i \sin \varphi_i, \\ \cos [\Delta \omega_m S_\Sigma (t)] \sum \kappa_i &= \sum \kappa_i \cos \varphi_i, \end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

где обозначено

$$\varphi_i = \Delta \omega_m S (t + \tau_i) + \delta_i. \tag{3.64}$$

Разделив в (3.63) первое равенство на второе, далее найдем

$$S_\Sigma (t) = \frac{1}{\Delta \omega_m} \operatorname{arctg} \frac{\sum \kappa_i \sin \varphi_i}{\sum \kappa_i \cos \varphi_i}. \tag{3.65}$$

Взяв производную от $S_\Sigma (t)$, получим

$$U_\Sigma (t) = \frac{1}{\Delta \omega_m} \frac{\sum \kappa_i \cos \varphi_i \sum \kappa_i \varphi_i' \cos \varphi_i + \sum \kappa_i \sin \varphi_i \sum \kappa_i \varphi_i' \sin \varphi_i}{\left( \sum \kappa_i \right)^2}. \tag{3.66}$$

Так как

$$\varphi_i' = \Delta \omega_m S' (t + \tau_i) = \Delta \omega_m U_0 (t + \tau_i) = \Delta \omega_m U_i,$$

то (3.66) можно записать в таком виде:

$$U_\Sigma (t) = \frac{\sum \kappa_i \cos \varphi_i \sum \kappa_i U_i \cos \varphi_i + \sum \kappa_i \sin \varphi_i \sum \kappa_i U_i \sin \varphi_i}{\left( \sum \kappa_i \right)^2}. \tag{3.67}$$

Для удобства дальнейшего анализа можно получить другой вариант выражения (3.67):

$$U_\Sigma (t) = \frac{\sum \kappa_i^2 U_i + \sum_{j \neq i}^{n} \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \kappa_j U_i \cos (\varphi_i - \varphi_j)}{\left( \sum \kappa_i \right)^2}. \tag{3.68}$$

*Коэффициент передачи четырехполюсника.* Вычислим теперь спектр функции $U_\Sigma(t) - G_{\Sigma i}(i\omega)$. Спектр исходного сообщения $U_0(t)$ считаем заданным $G(i\omega)$. Тогда спектр $U_i = U_0(t+\tau_i)$, как известно, равен $G(i\omega)e^{i\omega\tau_i}$. Таким образом, спектр первого слагаемого ф-лы (3.68) записывается элементарно. Во втором слагаемом ф-лы (3.68) требуется вычислить спектры функций вида

$$U_0(t+\tau_i)\cos[\omega_0(\tau_i-\tau_j)+\Delta\omega_m(S_i-S_j)].$$

Легко убедиться, что результаты вычисления дадут спектры в виде $G_{1ij}\cos\delta_{ij}+G_{2ij}\sin\delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \omega_0(\tau_i-\tau_j)$. Выражение для спектра $U_\Sigma(t)$ тогда можно записать в виде

$$G_\Sigma(i\omega) = \frac{G(i\omega)\cdot\sum\kappa_i^2 e^{i\omega\tau_i} + \sum_{j\neq i}^{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\kappa_j(G_{1ij}\cos\delta_{ij}+G_{2ij}\sin\delta_{ij})}{\left(\sum\kappa_i\right)^2}. \tag{3.69}$$

Основной интерес может представлять спектр, усредненный по $\tau_i$, который равен

$$\overline{G_\Sigma(i\omega)} = G(i\omega)\overline{e^{i\omega\tau_i}}\sum\kappa_i^2\Big/\left(\sum\kappa_i\right)^2, \tag{3.70}$$

так как можно принять $\cos\delta_{ij}=\sin\delta_{ij}=0$ и, таким образом, $G_{1ij}\cos\delta_{ij}+G_{2ij}\sin\delta_{ij}=0$. Отсюда для усредненного коэффициента передачи получаем окончательное выражение:

$$K(i\omega) = \frac{\overline{G_\Sigma(i\omega)}}{G(i\omega)} = A_{\text{ког}}\overline{e^{i\omega\tau_i}}. \tag{3.71}$$

Здесь мы ввели $A_{\text{ког}}$, который можно назвать коэффициентом когерентности излучения:

$$A_{\text{ког}} = \sum\kappa_i^2\Big/\left(\sum\kappa_i\right)^2. \tag{3.72}$$

Величина этого коэффициента зависит от числа лучей и их амплитуд и лежит в пределах

$$1/n < A_{\text{ког}} \leqslant 1. \tag{3.73}$$

*Из (3.71) следует, что усредненный коэффициент передачи эквивалентного многолучевому каналу четырехполюсника равен произведению коэффициента когерентности $A_{\text{ког}}$ на характеристическую функцию случайной*

*величины* $\tau_i$. Вид характеристической функции, как известно, определяется законом распределения $\tau_i$. Здесь $\tau_i$ надо рассматривать как девиацию времени запаздывания (и соответственно фазы) одного индивидуального луча, входящего в совокупность многих лучей. Для тропосферных каналов берут равномерный закон распределения $\tau$. Для оптических многолучевых каналов (лазерной связи) закон распределения $\tau_i$ иногда принимают нормальным. Найдем характеристические функции для обоих законов распределения.

*Равномерное распределение.* Пусть $\tau_i$ равномерно распределено в пределах

$$-\Delta\tau/2 \leqslant \tau_i \leqslant \Delta\tau/2.$$

Тогда

$$\overline{e^{i\omega\tau_i}} = \frac{1}{\Delta\tau}\int\limits_{-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\frac{\Delta\tau}{2}} e^{i\omega\tau_i}\,d\tau_i = \frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\Delta\tau}{2}}$$

и в этом случае

$$\overline{K(i\omega)} = A_{\text{ког}}\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\Delta\tau}{2}}. \qquad (3.74)$$

*Нормальное распределение.* Положив здесь

$$p(\tau_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{\tau_i^2}{2\sigma^2}},$$

найдем

$$\overline{K(i\omega)} = \frac{A_{\text{ког}}}{2}e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\left[\Phi\left(\frac{\Delta\tau}{2\sqrt{2}\,\sigma}+i\frac{\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\Phi\left(\frac{\Delta\tau}{2\sqrt{2}\,\sigma}-i\frac{\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)\right], \qquad (3.75)$$

где $\Phi(z)$ — функция Крампа. Сумма двух функций Крампа от комплексных сопряженных аргументов будет действительной величиной и выражается рядом

$$\Phi_\Sigma = \Phi(a+ix)+\Phi(a-ix) =$$

$$= 2\left[\Phi(a)-\frac{x^2}{2!}\Phi^2(a)+\frac{x^4}{4!}\Phi^4(a)-\ldots\right],$$

где $\Phi^n(a)$ — $n$-я производная от $\Phi(a)$.

Учитывая, что в реальных условиях обычно $x \ll 1$, в первом приближении возьмем $\Phi_\Sigma \approx 2\Phi(a)$.

Тогда получим

$$\overline{K(i\omega)} = A_{\text{ког}}\,\Phi\left(\frac{\Delta\tau}{2\sqrt{2}\sigma}\right) e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}. \tag{3.76}$$

Существенно отметить, что усредненные коэффициенты передачи, выраженные ф-лами (3.74) и (3.76), не зависят от вида передаваемого сообщения и параметров модуляции, а зависят только от параметров среды, через которую проходят электромагнитные волны.

*Переходная функция.* Усредненные коэффициенты передачи (3.74) и (3.76) являются действительными функциями, и поэтому для вычисления переходной функции может быть использовано известное соотношение

$$\overline{h(t)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\Omega \frac{\overline{K(i\omega)}}{\omega}\sin\omega t\, d\omega. \tag{3.77}$$

Рассматривая многолучевой канал как канал с неограниченной полосой ($\Omega \to \infty$), подставив в (3.77) соотношение (3.74), получим при равномерном распределении

$$\left.\begin{aligned} \overline{h(t)} &= A_{\text{ког}}\frac{2t}{\Delta\tau} \quad \text{при } t \leqslant \Delta\tau/2, \\ \overline{h(t)} &= A_{\text{ког}} \quad \text{при } t > \Delta\tau/2. \end{aligned}\right\} \tag{3.78}$$

При низких частотах сообщения, когда можно считать $\omega\Delta\tau/2 \ll 1$ (по 3.77), можно получить

$$\overline{h(t)} = (2A_{\text{ког}}/\pi)\,\mathrm{Si}(\Omega t), \tag{3.79}$$

где $\mathrm{Si}(x)$ — интегральный синус.

*При нормальном распределении* для бесконечно широкой полосы получим по (3.77)

$$\overline{h(t)} = A_{\text{ког}}\,\Phi\left(\Delta\tau/2\sqrt{2}\sigma\right)\Phi\left(t/\sqrt{2}\sigma\right). \tag{3.80}$$

Для ограниченной полосы $0-\Omega$ при условии $\Omega\sigma/2 \ll 1$ можно получить приближенное решение

$$\overline{h(t)} = \frac{2A_{\text{ког}}}{\pi}\,\Phi\left(\frac{\Delta\tau}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\left[\mathrm{Si}(\Omega t) - \frac{\sigma^2}{2t^2}\left(\sin\Omega t - \Omega t\cos\Omega t\right)\right]. \tag{3.81}$$

На рис. 3.1—3.3 показаны усредненные АЧХ коэффициента передачи и переходные функции, вычисленные

при параметрах, характерных для тропосферных каналов:

$\Delta\tau = 2\cdot10^{-7}$ и $\sigma_1 = 0{,}5\cdot10^{-7}$; $\Delta\tau = 2\cdot10^{-7}$ и $\sigma_2 = 0{,}8\cdot10^{-7}$.

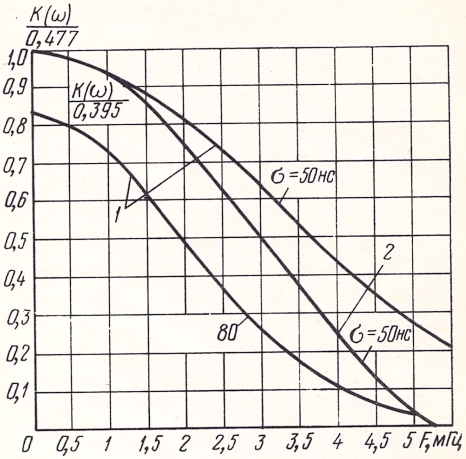


Рис. 3.1

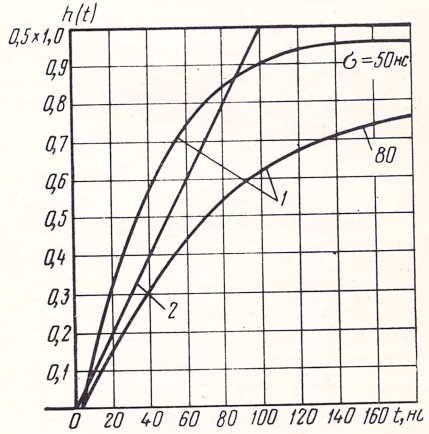


Рис. 3.2

На рис. 3.1 и 3.2: 1 — нормальное распределение, 2 — равномерное

Из этих кривых следует, что при средних, известных параметрах тропосферы $\Delta\tau \approx 200$ нс и $\sigma_1 = 50$ нс (зимнее

время) и $\sigma_2 = 80$ с (летнее время) средние эффективные полосы тракта по половинной мощности составляют:

при $\sigma_1 = 50$ нс $\sim 2{,}6$ Мгц
при $\sigma_2 = 80$ нс $\sim 1{,}58$ Мгц
} нормальное распределение

$\sim 2{,}4$ МГц — равномерное распределение.

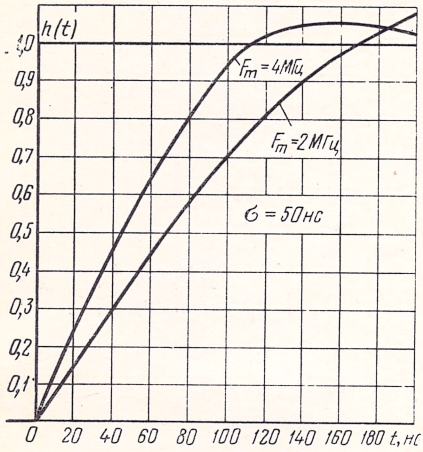


Рис. 3.3

Такие сравнительно узкие полосы тропосферного канала вполне объясняют относительно низкое качество передачи телевидения по тропосферным системам. Данные об эффективных полосах объясняют и причину лучшего качества передачи в зимнее время.

Длина многолучевого канала — $l$ и длина рабочей волны $\lambda$ так же, как и другие параметры системы связи, могут влиять на качество тракта лишь через параметры $\Delta\tau$ и $\sigma$. Таким образом, улучшению многолучевых каналов могут способствовать лишь те методы, которые уменьшают параметры $\Delta\tau$ и $\sigma$.

Коэффициент когерентности $A_{ког}$ определяет величину модуля усредненного коэффициента передачи. При большом числе лучей $n$ и отсутствии превалирующего луча этот коэффициент очень мал, что ведет к уменьшению $U_{\Sigma}(t)$ и, следовательно, к уменьшению отношения сообщение/шум.

*Из всего изложенного в этой главе следует, что метод нулевого отклонения является весьма простым и удобным для решения многих задач из области вопросов помехоустойчивости и искажений.*

# ГЛАВА 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ПОРОГА ИЗ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ШЕННОНА

## 4.1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

*Статистический смысл передачи сообщения.* В технике связи имеют дело с передачей дискретных или непрерывных сообщений, причем эти сообщения обычно относятся к области стационарных случайных процессов.

Передача дискретных сообщений характерна для телеграфии, в которой буквенный текст передается телеграфным кодом. Пусть число букв всего текста равно $n$, а число букв в используемом алфавите равно $L$. Алгебраически можно легко доказать, что число $M$ всех возможных текстов, т. е. число всех возможных комбинаций, состоящих из $n$ букв, когда каждая буква может принимать $L$ различных значений, равно

$$M = L^n . \tag{4.1}$$

Таким образом, исходящий из источника сообщения и принимаемый потребителем каждый данный индивидуальный текст есть лишь один из $M$ возможных вариантов текста. Следовательно, в статистическом смысле сущность процесса передачи дискретного сообщения от источника до потребителя заключается в выборе нужного текста из $M$ возможных текстов.

Аналогичная картина имеет место и при передаче непрерывных сообщений. Рассмотрим одно из возможных сообщений $A(t)$, передаваемых по каналу связи (рис. 4.1). Продолжительность этого сообщения равна $T$, а мгновенные значения лежат в пределах от $-(L+1)/2$ до $+(L+1)/2$.

В другое время по каналу может передаваться другое сообщение такой же длительности, мгновенные значения которого лежат в тех же пределах. Принципиально может существовать бесконечное множество различных сообщений, удовлетворяющих данным условиям, т. е. длительность каждого из них равна $T$, а мгновенные значения не выходят за пределы $-(L+1)/2$ и $+(L+1)/2$.

Однако в реальных условиях по каналу связи можно передавать только конечное множество различных сообщений. Происходит это оттого, что в реальном канале можно различить лишь конечное число уровней передачи $L$, так как достаточно близкие уровни передачи не могут быть различимы из-за шумов в канале.

Действительно, пусть пиковое напряжение шума в канале равно $U_N$, максимальная амплитуда сообщения равна $U_A$, а какое-либо мгновенное напряжение сообщения равно $U_{Ai}$. Тогда очевидно, что значения уровней сообщения, лежащие в пределах $U_{Ai} \pm U_N$, неразличимы из-за шумов. Принципиально можно различить лишь соседние уровни:

$$U_{Ai-1} = U_{Ai} - U_N ; \; U_{Ai+1} = U_{Ai} + U_N .$$

Отсюда число возможных различимых уровней

$$L = U_A / U_N + 1. \qquad (4.2)$$

В каждый интервал времени $\Delta T$ (см. рис. 4.1) по каналу может быть передан лишь один из $L$ возможных уровней. Пусть число таких интервалов

$$n = T/\Delta T. \qquad (4.3а)$$

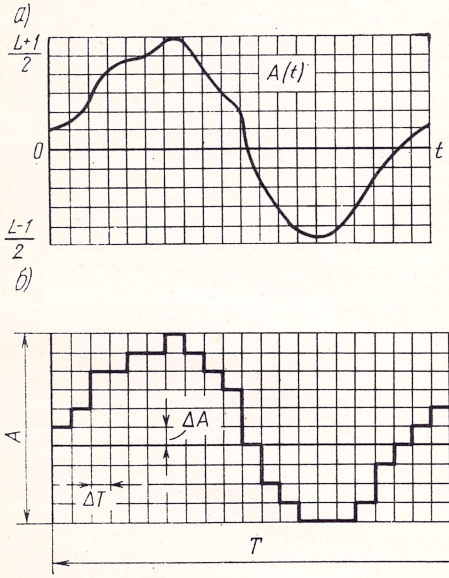


Рис. 4.1

Тогда число всех функций множества $M$ можно также определить по ф-ле (4.1).

Таким образом, передача любого непрерывного сигнала (или сообщения) из-за наличия в реальных каналах связи различного рода шумов сводится, по существу, к передаче лишь $L$ различимых уровней. Поэтому каждое непрерывное сообщение (рис. 4.1*а*) можно рассматривать как дискретное, представив его в виде ряда импульсов (посылок) длительностью $\Delta T$, высота которых скачкообразно изменяется через интервалы, кратные $\Delta A$ (рис. 4.1*б*). Если значения $\Delta T$ и $\Delta A$ выбраны достаточно малыми, то непрерывная кривая линия, описывающая сообщение, может быть сколь угодно точно аппроксимирована ступенчатой линией. Если размах кривой сообщения равен $A$, а длительность сообщения равна $T$, то числа всех посылок сообщения $n$ и уровней $L$, которые принимает сообщение, соответственно равны:

$$n = T/\Delta T;\ L = (A + \Delta A)/\Delta A. \qquad (4.3б)$$

Подставив эти параметры в ф-лу (4.1), можно определить все множество $M$ различимых возможных сообщений.

Таким образом, сущность передачи непрерывного сообщения (как и дискретного) можно рассматривать как выбор одного определенного сообщения из $M$ возможных различимых сообщений.

Отметим, что преобразование непрерывного сообщения в дискретное может происходить не только произвольно вследствие присутствия шумов в канале, но и непроизвольно, если осуществляется кодирование сообщения, как это имеет место, например, при применении импульсно-кодовой модуляции или дельта-модуляции.

На основании сказанного выше можно, таким образом, считать, что статистический смысл передачи сообщения любого вида (дискретного или непрерывного) заключается в выборе одного нужного сообщения из всех $M$ возможных сообщений.

*Статистические свойства сообщения. Сообщение как цепь Маркова.* Так как любое сообщение (или сигнал) можно представить в виде дискретного, то, следовательно, можно рассматривать статистические свойства лишь дискретных сообщений. Одно из свойств таких сообщений характеризуется вероятностями появления различных значений сообщения, т. е. $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_L)$, если $A_1$, $A_2$, ..., $A_L$ — различные значения сообщения.

Другие свойства характеризуются вероятностями появления рядом двух назначений сообщения $P(A_i, A_j)$, трех значений сообщения $P(A_i, A_j, A_k)$ и т. д. Эти вероятности уже определяют связь между отдельными значениями сообщения.

Для связанных событий $P(A_i, A_j) = P(A_i) P(A_j/A_i)$, где $P(A_j/A_i)$ — условная вероятность.

Если $P(A_j/A_i) = 0$, то это означает, что за значением сообщения (события) $A_i$ никогда не следует значение $A_j$. При $P(A_j/A_i) = 1$ можно утверждать обратное: после значения сообщения $A_i$ всегда следует значение сообщения $A_j$. Промежуточные значения этой вероятности характеризуют, таким образом, величину связи между различными событиями.

Пусть в последовательные моменты времени $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ имели место события (значения сообщения) $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$. Эти события могут быть связаны между собой так, что вероятность события $A_i$ в момент времени $t_i$ зависит и от того, что за $m$ предшествующих моментов времени $t_{i-m}$, $t_{i-(m-1)}$, $t_{i-1}$ имели место события $A_{i-m}$ $A_{i-(m-1)}$, ..., $A_{i-1}$, и не зависит от событий в моменты $t_v (v < i-m)$ и от $i$ (т. е. от наблюдаемого момента времени).

Такая последовательность событий в теории вероятностей называется *однородной сложной цепью Маркова.* Если же в подобной цепи вероятность события $A_i$ зависит от $i$, то сложная цепь Маркова называется неоднородной. В частном случае, когда вероятность события $A_i$ зависит только от предшествующего события $A_{i-1}$, цепь Маркова называется *простой.*

В теории вероятности доказывается, что исследование любой сложной цепи можно свести к исследованию соответствующим образом сконструированной простой цепи.

Если законы распределения вероятности систем случайных величин $(A_{t_1}, A_{t_2}, ..., A_{t_n})$ и $(A_{t_1+\tau}, A_{t_2+\tau}, ..., A_{t_n+\tau})$ совпадают и, следовательно, не зависят от $\tau$, каковы бы ни были числа $n$, $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$, то такая цепь называется также *стационарной.*

Если последовательность значений (событий) такая, что относительное число (частота) $m_i/s$ появления значения (события) $A_i$ со сколь угодно близкой к единице вероятностью будет сколь угодно

мало отличаться от $P_i$ (при достаточно большом $s<n$), то такая цепь носит название *эргодической* цепи Маркова.

Рассмотренные выше дискретные и непрерывные, но преобразованные в дискретные сообщения, встречающиеся в системах связи, относятся обычно к стационарным эргодическим последовательностям или цепям Маркова. Физически стационарность и эргодичность можно понимать как статистическую однородность процесса. Это означает, что если, например, изучать статистические особенности отдельных частей телеграммы с очень большим текстом (причем число слов в каждой части достаточно велико), то обнаружится, что частота появления отдельных букв, двухбуквенных сочетаний, трехбуквенных сочетаний и т. д. стремится в этих частях к одному и тому же пределу по мере увеличения числа слов в каждой части.

Поскольку реальные сообщения относятся обычно к стационарным эргодическим цепям Маркова и, кроме того, как указано, каждая сложная цепь может быть сведена к рассмотрению простой цепи, то, следовательно, рассматриваемые дискретные цепи с конечным числом состояний $A_1$, $A_2$, ..., $A_L$ определяются лишь вероятностями этих состояний $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_L)$ и переходными вероятностями вида $P(A_j/A_i)$, где $j$, $i=1, 2, ..., L$.

*Физический смысл статистических закономерностей сообщения. Смысл кодирования.* Наличие определенных статистических закономерностей реальных сообщений уменьшает число возможных значений сообщений, из которых выбирается нужное сообщение при передаче. Следовательно, в реальных случаях, например, передачи текста выбор приходится осуществлять не из $M$ возможных комбинаций букв, определяемых ф-лой (4.1), а из $M'$ комбинаций, причем $M'<M$. Действительно, пусть передаваемый текст относится к текстам, в которых за буквой *б* всегда следует буква *а*, т. е. $P(A_а/A_б)=1$. Довольно очевидно, что число таких текстов $M'$ будет составлять только часть всех возможных текстов $M$. В этом легко убедиться на элементарном примере передачи трехбуквенных текстов ($n=3$), составленных, например, из букв *а* и *б* ($L=2$). Всего таких текстов будет $M=L^n=2^3=8$:

| | |
|---|---|
| *а а а* | *а б а* |
| *б б б* | *б а а* |
| *а а б* | *б б а* |
| *а б б* | *б а б* |

Однако среди этих текстов только в четырех последних за буквой *б* следует буква *а*, т. е. $M'=4$.

Физически при сложных сообщениях это проявляется в том, что только очень немногие из $M$ комбинаций представляют собой осмысленный текст, напоминающий какое-либо реальное сообщение. Подавляющее большинство этих комбинаций будет бессмысленным сочетанием букв. При этом чем длиннее текст, т. е. чем больше в нем общее число букв $n$, тем, по-видимому, меньшая часть из возможных комбинаций может быть осмысленным сообщением. Так, например, кажется совершенно невероятным, чтобы случайная комбинация уже из 100 букв составила осмысленную фразу.

Изучение реальных текстов действительно подтверждает, что имеются вполне определенные вероятности появления отдельных букв, например, $P(а)$, $P(б)$, $P(в)$, ... и определенные переходные вероятности, например, $P(а/б)$, $P(а/в)$, ... и т. д. Так, крупнейший советский математик А. А. Марков подсчитал, используя 20 000 букв

текста «Евгения Онегина», что вероятность появления гласной после гласной равна 0,128, а вероятность появления гласной после согласной равна 0,663.

Совершенно аналогичные соотношения имеют место и для непрерывных сообщений. Действительно, далеко не каждое непрерывное сообщение может быть воспринято как реальное сообщение. Так, почти невероятно, чтобы случайные звуковые колебания (например, созданные помехами) были восприняты как человеческая речь или музыка.

На использовании этой основной статистической особенности передаваемых реальных сообщений основана возможность кодирования. Действительно, если реальное сообщение, характеризуемое параметрами $L$ и $n$, может принимать всего лишь $M'$ значений, причем $M' \ll M$, то для его кодирования потребуется ровно столько же кодовых комбинаций. Все эти кодовые комбинации могут быть получены путем использования сочетаний всего лишь из $n'$ посылок:

$$M' = L^{n'}, \tag{4.3в}$$

так как при этом $M' < M$, то и $n' < n$. Вместо $L$-значного кода можно также использовать $L'$-значный код, причем $L' < L$ и

$$M' = L'^{n}. \tag{4.4}$$

Следовательно, использование статистических свойств сообщения, в принципе, позволяет перейти к кодированному сигналу с меньшими количеством посылок или значностью кода, чем сообщение. Как показано, это позволяет сократить необходимую для передачи полосу частот канала связи.

*Мера количества передаваемой информации. Понятие энтропии.* Весьма существенно и характерно для современной теории связи введение меры передаваемого сообщения или меры количества информации. Естественно, что, как и всякая мера (например, мера массы килограмм, мера величины тока ампер), мера количества информации должна быть в известном смысле абстрактным понятием[1].

Возможно абстрактно оценить также энергию, затраченную грузчиком на перенос определенного груза, и энергию, затраченную композитором на сочинение симфонии, например, в человеко-днях или даже в джоулях. Но всякая такая мера, хотя и является весьма полезной и необходимой, не исчерпывает конкретного содержания того или иного труда.

В общежитии под информацией понимают обычно смысловое содержание сообщения. Однако, как далее будет показано, вводимая мера количества информации не отображает смыслового содержания; она является весьма полезной величиной, характеризующей сложность сообщения в техническом смысле, с точки зрения легкости передачи этого сообщения по заданному каналу связи. Здесь имеем в известной степени аналогию с тем, что килограммы (или тонны) груза определяют необходимые транспортные средства, а амперы и вольты электрического тока — необходимые диаметры проводов, качество изоляции и т. п.

---

[1] Так, соль и золото измеряют килограммами, однако ценность этих веществ весьма различна, хотя массы их могут быть одинаковыми.

Дадим физически наглядное определение меры количества информации, принятое в современной теории связи [1].

В качестве этой меры можно было бы принять величину $M'$, т. е. количество всех возможных значений сообщения, из которых выбирается нужное сообщение. Однако, как показывает изучение этого вопроса, величина $M'$ не может являться такой мерой, поскольку она не удовлетворяет основному условию, предъявляемому ко всякой мере, — условию аддитивности. Суть этого условия применительно к передаче сообщений должна, очевидно, сводиться к тому, что количество информации, содержащееся в сообщении, должно быть пропорционально числу посылок $n$, т. е., например, вдвое более длинное сообщение (например, телеграмма из вдвое большего числа слов) должно содержать вдвое большее количество информации. Легко убедиться, что этому условию удовлетворяет другая мера, а именно логарифм от $M'$. Поэтому абсолютной мерой количества информации принято считать двоичной логарифм величины $M'$:

$$V_c = \log_2 M'. \tag{4.5}$$

Можно было бы взять десятичный или натуральный логарифм от $M'$, однако, как далее будет ясно, двоичным логарифмом пользоваться удобнее.

Подставляя в (4.5) вместо $M'$ его значение из (4.4), получим

$$V_c = n \log_2 L'. \tag{4.6}$$

Величину $V_c$ называют *объемом информации*. Смысл этого термина поясняется ниже.

Представим себе, что сообщение передается самым простейшим кодом — двузначным, например, при передаче импульсами всего двух уровней. При этом в качестве одного из уровней может быть взято нулевое значение высоты импульса, т. е. код будет состоять из двух знаков — «есть импульс», «нет импульса». В этом случае $M'=2^{n'}$ и, следовательно ($V_c$ в битах),

$$V_c = n'. \tag{4.7}$$

Таким образом, абсолютной мерой количества информации — объемом информации — является не что иное, как количество импульсов двоичного кода, с помощью которого может быть передано сообщение. Поэтому единицу измерения объема информации называют двоичной единицей, или, сокращенно, *бит*.

Однако в теории связи значительно более употребительной мерой для оценки количества информации является не абсолютная мера, выражаемая ф-лой (4.5), а относительная мера

$$H = \lim_{n\to\infty} V_c/n, \tag{4.8}$$

или согласно выражению (4.5)

$$H = \lim_{n\to\infty} \log_2 M'/n. \tag{4.9}$$

---

[1] Современная строгая теория информации является сложной математической теорией, представляющей совокупность аксиом, теорем и выводов из них. Там дано и строгое определение меры количества информации и др. Однако для наших целей достаточно иметь возможно менее строгие, но наглядные физические представления и определения.

Таким образом, под относительной мерой количества информации, как это следует из (4.8), понимается количество бит, приходящееся на одну посылку сообщения, когда число этих посылок (или условно «длина сообщения») стремится к бесконечности.

Из выражений (4.4) и (4.9) находим

$$H = \lg L'. \tag{4.10}$$

Эту относительную меру количества информации называют *энтропией*[1].

Так как общее число сообщений равно $M = L^n = 2^{n \lg_2 L}$ и $M' \leqslant M$, то, следовательно, всегда $H \leqslant \log_2 L$. Только при независимых $L$-символах $H = \log_2 L$.

Покажем на примере, что энтропию очень просто выразить через значения вероятностей отдельных знаков сообщения, что еще более подчеркивает ее связь со статистическим характером передаваемых сообщений.

Рассмотрим весьма длинное сообщение, состоящее из $n$ посылок или символов, где $n$ — весьма большое число. Пусть любое такое сообщение содержит $L$ различных знаков, соответствующих, например, различным буквам алфавита. Пусть вероятности появления различных знаков или букв будут соответственно $P_1$, $P_2$, ..., $P_L$ во всех сообщениях и только порядок этих знаков может быть различным в различных возможных сообщениях. Тогда очевидно, что число одинаковых знаков в каждом сообщении равно $P_1 n$, $P_2 n$, ..., $P_L n$.

Считая все символы независимыми, получим, что вероятность повторения в каждом сообщении одного и того же знака $i$ раз равна $i$-кратному произведению вероятностей появления этого знака, т. е. вероятности повторения разных знаков равны соответственно $P_1^{P_1 n}$, $P_2^{P_2 n}$, ..., $P_L^{P_L n}$. Наконец, вероятность появления всего данного сообщения равна в соответствии с таким же правилом

$$P = P_1^{P_1 n} P_2^{P_2 n} \ldots P_L^{P_L n}. \tag{4.11}$$

Так как полагаем, что все сообщения в статистическом смысле одинаковые, то, следовательно, общее число всех таких сообщений из $n$ символов равно $M = 1/P$. Тогда, пользуясь ф-лой (4.9), получим ($H$ в бит./символ)

$$H = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{P} = -\sum_{k=1}^{L} P_k \log_2 P_k. \tag{4.12}$$

В приведенном рассуждении принималось, что все отдельные символы взаимно независимые, т. е. все $P(A_j/A_i) = 0$.

В более общем случае, при наличии связи между посылками, для энтропии $H$ служит другое более сложное выражение.

---

[1] Название «энтропия» взято на основании того, что энтропия в теории связи и энтропия в теории теплопередачи выражаются формально аналогичными формулами.

## 4.2. ВЫРАЖЕНИЕ ОБЪЕМА ИНФОРМАЦИИ ЧЕРЕЗ ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СООБЩЕНИЯ

В соответствии с (4.5) величина

$$V_c = \lg M' = n H \tag{4.13}$$

является абсолютной мерой количества информации. В этом соотношении $H$ — энтропия и $n$ — число дискретных значений в сообщении или в сигнале. Будем рассматривать в общем случае непрерывные сообщения. Но по теореме В. А. Котельникова, изложенной в § 1.3, сообщение или сигнал продолжительностью $T_c$ и с ограниченной полосой частот $W$ достаточно хорошо аппроксимируется дискретным сообщением (или цепочкой), у которого

$$n = 2WT. \tag{4.14}$$

Подставляя это значение в (4.13), получим

$$V_c = 2WTH. \tag{4.15}$$

Таким образом, абсолютная мера информации определяется произведением трех основных величин, характеризующих сообщение или сигнал: ширины спектра, продолжительности и энтропии.

Величины $W$, $T$ и $H$ можно представить в виде отрезков, отложенных параллельно трем координатным осям: времени, частот и энтропии в прямоугольной системе координат. Тогда величина $V_c$ будет равна удвоенному объему параллелепипеда с ребрами $W$, $T$ и $H$. Поэтому величину $V_c$ и называют объемом информации сообщения[1].

*Объем информации непрерывного сообщения.* Выражение (4.15) объема информации справедливо для любых сообщений как дискретных, так и непрерывных. Однако если для вычисления энтропии $H$ дискретных сообщений, входящей в ф-лу (4.15), может быть использовано выражение (4.12), то для вычислений энтропии непрерывного сообщения необходимо воспользоваться интегральным соотношением, которое можно получить из (4.12).

Если $p(A)$ — плотность распределения вероятности кривой непрерывного сообщения, то $\Delta A p(A_i)$ есть ве-

---

[1] В теории связи иногда пользуются также понятием *объем сигнала*, подразумевая под ним величину, определяемую формулой $V_{сиг} = WTH^*$, где $H^* = \lg P_c/P_ш$; $P_c$ — средняя мощность сигнала и $P_ш$ — средняя мощность шума в канале.

роятность значения амплитуды $A_i$. Подставляя это выражение для вероятности в (4.12), получим

$$H = -\sum \Delta A p(A_i) \lg [\Delta A p(A_i)].$$

Суммирование можно заменить интегрированием, взяв под знаком суммы вместо $A_i$ величину $A$, а вместо $\Delta A$ — $dA$.

Тогда

$$H = -\int_{A_1}^{A_2} p(A) \lg [p(A) \Delta A] \, dA, \tag{4.16}$$

где $A_2 - A_1 = L\Delta A$. Эта формула справедлива для любого конечного значения величины ступеньки $\Delta A$, а при $\Delta A \to 0$ она дает $H \to \infty$, как и должно быть.

Естественно, что ф-ла (4.16) может быть использована для расчета величины энтропии квантованного сигнала.

*Выражение объема информации через среднюю мощность.* Реальные сообщения и сигналы оцениваются в практике чаще всего их продолжительностью, полосой и средней (иногда пиковой) мощностью. Оказывается, что энтропия, а следовательно, и объем информации могут быть выражены через значение средней или пиковой мощности. Это непосредственно следует из (4.10):

$$2H = \lg (L')^2 = \lg (A'/\Delta A + 1)^2 \approx \lg A'^2/\Delta A^2. \tag{4.17}$$

В ф-ле (4.17) величина A′ представляет собой размах сообщения или сигнала, равный $A'_2 - A_1'$, или пиковое значение сообщения, если $A_1' = 0$.

Но тогда

$$A'^2 = \kappa_c^2 P_c, \tag{4.18}$$

где $P_c$ — средняя мощность; $\kappa_c$ — пик-фактор сообщения. Таким образом,

$$2H \approx \lg \kappa_c^2 P_c/\Delta A^2 = \lg A_c P_c. \tag{4.19}$$

В этой формуле

$$A_c = \kappa_c^2/\Delta A^2 \tag{4.20}$$

есть коэффициент, определяемый вероятностными характеристиками сообщения и величиной ступени квантования — $\Delta A$.

На основании (4.15) для объема сообщения можно теперь написать

$$V_c = 2TWH = TW \lg A_c P_c. \tag{4.21}$$

В этом соотношении параметры $T$, $W$ и $P_c$ — известные и легко определяемые физические параметры. Особым параметром является $A_c$, который зависит от статистических характеристик сигнала или сообщения и от величины ступени квантования.

Так как $\Delta A$ может задаваться произвольно, то параметром, требующим особого определения, является $\kappa_c^2$. Это определение не представляет принципиальных трудностей, если известен закон распределения мгновенных значений сигнала $A$. Для такого определения необходимо использовать два соотношения, одним из которых является соотношение (4.16), а другое соотношение будет

$$P_c = \int_{A_1}^{A_2} A^2 p(A)\, dA. \tag{4.22}$$

Проиллюстрируем на нескольких примерах вычисление параметра $\kappa_c^2$.

*Равномерное распределение.* Пусть все значения сигнала распределены равномерно в пределах $0 \leqslant A \leqslant A_m$ Тогда закон распределения будет $p(A) = 1/A_m$ и соотношение (4.16) приводит к

$$H = \int_0^{A_m} \frac{1}{A_m} \lg (A_m/\Delta A)\, dA = \frac{1}{A_m} \lg (A_m/\Delta A) \int_0^{A_m} dA =$$

$$= \lg (A_m/\Delta A).$$

Отсюда

$$2H = \lg (A_m/\Delta A)^2, \tag{4.23}$$

т. е. соотношение (4.17). Далее, по (4.22)

$$P_c = \int_0^{A_m} A^2 (1/A_m)\, dA = A_m^2/3.$$

Таким образом, $A_m^2 = 3P_c$. Подставив это в (4.23), получим

$$2H = \lg 3P_c/\Delta A^2. \tag{4.24}$$

*Нормальное распределение.* В этом случае, как известно,

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}.$$

Далее находим

$$-\lg [p(A)\,\Delta A] = \lg \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{\Delta A} + \frac{A^2}{2\sigma^2} \lg e$$

и по (4.16)

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} p(A) \lg [p(A)\,\Delta A]\, dA = \int_{-\infty}^{\infty} p(A) \lg \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{\Delta A} dA +$$

$$+ \lg e \int_{-\infty}^{\infty} p(A) \frac{A^2}{2\sigma^2} dA = \lg \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{\Delta A} + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} \lg e = \lg \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{\Delta A} +$$

$$+ \lg \sqrt{e} = \lg \frac{\sqrt{2\pi e}}{\Delta A} \sigma.$$

Отсюда

$$2H = \lg \left[ \frac{2\pi e}{\Delta A^2} P_c \right], \tag{4.25}$$

так как $\delta^2 = P_c$. Здесь значение пик-фактора равно $\kappa_c^2 = 2\pi e \approx 17$.

Можно предположить, что в пределе минимальное значение условного пик-фактора $\kappa_c^2$ равно единице. Это может иметь место при $A^2 = P_c$, что соответствует сигналу постоянного тока. Всякие другие реальные сообщения и сигналы с другими статистическими законами распределения уровней будут иметь значения условного пик-фактора, лежащие в пределах

$$1 \leqslant \kappa_c^2 \leqslant 17. \tag{4.26}$$

Для синусоидального сигнала с амплитудой $A$ пиковая мощность равна $A^2$, а средняя $A^2/2$. Отсюда $\kappa_c^2 = 2$.

### 4.3. КАНАЛ И ЕГО ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ

*Канал и емкость канала.* Сигнал проходит через совокупность электрических устройств, образующих так называемый канал связи. В практике канал связи характеризуют обычно полосой пропускания $W_к$, временем

$T_к$, в течение которого канал предоставлен для работы, и динамической характеристикой, которую условно обозначим через $H_к$. Совершенно очевидно, что неискаженная передача сигнала по каналу возможна при условии

$$W_к \geqslant W, \quad T_к \geqslant T, \quad H_к \geqslant H. \tag{4.27}$$

Удвоенное произведение трех параметров канала

$$V_к = 2W_к T_к H_к \tag{4.28}$$

назовем емкостью канала.

Более общим условием того, что канал может пропустить сигнал без искажений, является следующее: объем информации сигнала должен быть меньше или равен емкости канала, т. е.

$$V_с \leqslant V_к. \tag{4.29}$$

Однако, очевидно, что, принимая условие (4.29) за единственное [при одновременном несоблюдении неравенств (4.27)], требуется преобразовать сигнал так, чтобы соотношение (4.29) соблюдалось. Это достигается изменением или деформацией объема сообщения, т. е. изменением соотношения величин $W$, $T$ и $H$. Такую деформацию сигнала можно производить с помощью кодирующего устройства, модулятора и т. п.

Проведем аналогию между передачей информации по каналу и, например, движением жидкости по трубе или транспортировкой какого-либо вещества с помощью определенных ограниченных средств.

Количество транспортируемого вещества, например, количество жидкости, пропускаемой по трубе, будет определяться временем $T_т$, затраченным на транспортировку, возможностями транспортных средств $W_т$ (например, диаметром трубы) и скоростью транспортировки $H_т$ (например, скоростью течения воды в трубе). В связи с этим энтропию принято иногда называть скоростью создания сообщений, если $H$ относится только к источнику информации, и скоростью передачи сообщений по каналу без шумов.

*Основное соотношение для пропускной способности (емкости) канала связи при наличии шумов.* Шумы в реальном канале связи снижают количество ценной информации в сообщении, так как некоторые частные значения уровней сообщения могут быть изменены шумами настолько, что они будут приняты за другие возможные значения уровней. Теоретически это проявляется в том,

что полезная энтропия сложного сообщения, состоящего из полезного сообщения и шума, уменьшается. Как было доказано Шэнноном, энтропия в этом случае (при допущении, что полезные сообщения и шумы взаимно независимы)

$$H = H_{сл} - H_{ш}, \tag{4.30}$$

где $H_{сл}$ — энтропия суммы сообщения и шума; $H_{ш}$ — энтропия шума.

Если средние мощности сообщения и шума соответственно равны $P_с$ и $P_ш$, то удвоенная энтропия

$$H_{сл} = \lg A_{сл}(P_с + P_ш). \tag{4.31}$$

Удвоенная энтропия шума

$$2H_ш = \lg A_ш P_ш. \tag{4.32}$$

Подставляя эти значения энтропии в (4.30), получаем

$$2H = \lg A_{сл}(P_с + P_ш) - \lg A_ш P_ш =$$
$$= \lg [(A_{сл}/A_ш)(P_с/P_ш + 1)]. \tag{4.33}$$

Отсюда предельная пропускная способность канала связи или предельная емкость канала связи

$$C = V/T = W \lg (A_{сл}/A_ш)[(P_с/P_ш) + 1]. \tag{4.34}$$

Оценивая энтропию сигнала и шума при одинаковых ступенях квантования $\Delta A$, можно записать

$$C = W \lg \left( \kappa^2_{сл}/\kappa^2_ш \right)[(P_с/P_ш) + 1], \tag{4.35}$$

где $\kappa^2_{сл}$ и $\kappa^2_ш$ — условные пик-факторы.

Если статистические свойства сообщения и шума одинаковы и характеризуются нормальным законом распределения, то, очевидно, $\kappa^2_{сл} = \kappa^2_ш$ и

$$C_{max} = W \lg (P_с/P_ш + 1). \tag{4.36}$$

Эта формула была впервые получена Шенноном в [33]. Она выражает максимально возможную пропускную способность канала, поскольку согласно ранее сказанному [см. выражение (4.26)]

$$\kappa^2_{сл}/\kappa^2_ш \leqslant 1, \tag{4.37}$$

если шум имеет нормальное распределение.

Формулы (4.35) и (4.36) очень важны в современной теории связи, так как позволяют практически оценить различные системы связи по их пропускной способности.

## 4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ПОРОГА

*Преобразование формулы (4.35).* Важнейшая для анализа и расчетов ф-ла (4.35) неудобна тем, что представляется очень сложным вычислить значение пик-фактора $\kappa^2_{сл}$ смеси сигнала с шумом в общем случае, когда законы распределения сигнала и шума различны. Однако для приближенных оценок представляется возможным преобразовать соотношение (4.35) так, чтобы в него входили только $\kappa^2_с$ — пик-фактор только полезного сообщения или сигнала и $\kappa^2_ш$ —пик-фактор шума, которые, как показано в § 4.3, в отдельных случаях вычисляются сравнительно просто.

Поскольку сигнал и шум на входе приемника будем считать независимыми и аддитивными, то как средние, так и пиковые мощности могут складываться и можно написать равенство

$$\kappa^2_с P_с + \kappa^2_ш P_ш = \kappa^2_{сл}(P_с + P_ш). \qquad (4.38)$$

Отсюда находим

$$\kappa^2_{сл} = \kappa^2_с P_с/(P_с + P_ш) + \kappa^2_ш P_ш/(P_с + P_ш) =$$

$$= \kappa^2_с \rho/(1 + \rho) + \kappa^2_ш/(1 + \rho),$$

и тогда

$$\frac{\kappa^2_{сл}}{\kappa^2_ш} = \frac{\kappa^2_с}{\kappa^2_ш}\frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}. \qquad (4.39)$$

Здесь, при рассмотрении канала на входе приемника, введены такие обозначения: $P_с$ — средняя мощность полезного сигнала на входе; $P_ш$ — средняя мощность шума на входе и $\rho = P_с/P_ш$ — обозначение, которое нами использовалось в предыдущих главах.

Подставив (4.39) в (4.35), получим

$$C_к = w \lg\left(1 + \frac{\kappa^2_с}{\kappa^2_ш}\rho\right). \qquad (4.40)$$

Здесь $w$ — полоса ВЧ входного сигнала приемника (реально полоса УПЧ). Это соотношение можно рассматривать как информационную емкость ВЧ канала.

Формула (4.40) значительно более удобна для практического использования.

*Условие предельной помехоустойчивости и определение порога.* Модулированный сигнал на входе приемника вместе с шумом после демодуляции дает на выходе приемника сообщение с примесью шума. Информационная емкость этой смеси сообщения и шума будет выражаться аналогично (4.40):

$$C_{\text{с}} = W \lg \left( 1 + \frac{\kappa^2_{\text{св}}}{\kappa^2_{\text{шв}}} \eta \right), \tag{4.41}$$

где $\kappa^2_{\text{св}}$ — пик-фактор передаваемого сообщения; $\kappa^2_{\text{шв}}$ — пик-фактор шума на выходе приемника и $\eta = P_{\text{св}}/P_{\text{шв}}$ — отношение средних мощностей сообщение/шум на выходе.

Предельным условием неискаженной передачи сообщения, согласно (4.29), будет $C_{\text{с}} = C_{\text{к}}$, т. е.

$$w \lg \left( 1 + \frac{\kappa^2_{\text{с}}}{\kappa^2_{\text{ш}}} \rho \right) = W \lg \left( 1 + \frac{\kappa^2_{\text{св}}}{\kappa^2_{\text{шв}}} \eta \right). \tag{4.42}$$

Этому выражению для удобства использования лучше придать другой вид: вводя обозначения

$$K_{\text{с}} = \frac{\kappa^2_{\text{с}}}{\kappa^2_{\text{ш}}}, \quad K_{\text{св}} = \frac{\kappa^2_{\text{св}}}{\kappa^2_{\text{шв}}}$$

и разделив (4.42) на $W$, получим

$$(w/W) \lg (1 + K_{\text{с}} \rho) = \lg (1 + K_{\text{св}} \eta). \tag{4.43}$$

Естественно, что равносильно такое выражение:

$$(1 + K_{\text{с}} \rho)^{w/W} = 1 + K_{\text{св}} \eta. \tag{4.44}$$

Практически удобно равенство (4.43) взять в децибелах:

$$(w/W)(1 + K_{\text{с}} \rho)_{\text{дБ}} = (1 + K_{\text{св}} \eta)_{\text{дБ}}. \tag{4.45}$$

Уравнения (4.42) — (4.45) дают возможность определить значения $\rho$ и $\eta$, при которых пропускная способность канала полностью используется, и при этом, в принципе, могут быть достигнуты условия обеспечения передачи сообщения при минимальных искажениях (шумах). Задаваясь каким-либо значением $\rho$, получим предельно возможное значение $\eta$, при котором объем полученной информации не превышает объема сигнала. Следовательно, выигрыш, равный $B_{\text{пред}} = \eta/\rho$, получаемый

из (4.43) — (4.45), не может быть превышен никакими способами при заданных $w$, $W$, $K_с$ и $K_{св}$.

Условием порога будет при этом, по-видимому, равенство

$$\rho_{.\,ор} = \eta_{пор} \tag{4.46}$$

при вычислениях по (4.45), так как при $\rho < \rho_{пор}$ станет $\eta < \rho$ и никакого выигрыша система обеспечить не может.

Как показывают расчеты, другим условием порога можно считать равенство объемов сигнала и шума во входном канале, что приводит к равенству

$$\kappa_с^2 P_с = \kappa_ш^2 P_ш, \tag{4.47}$$

откуда

$$\rho_{пор} = (P_с/P_ш)_{пор} \approx \kappa_ш^2/\kappa_с^2. \tag{4.48}$$

Более близким к практике условием является равенство

$$\rho_{пор} = \alpha\, \kappa_ш^2/\kappa_с^2, \tag{4.49}$$

где $\alpha$ лежит в пределах $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

*Практические расчеты* $\rho_{пор}$ и $B_{пред}$. Рассчитаем $\rho$ и $\eta$ в децибелах для двух случаев, когда многоканальное сообщение передается с помощью АМ и ЧМ сигналов. Само по себе многоканальное телефонное сообщение считают распределенным по нормальному закону. Рассматриваем и помеху в виде флуктуационного гладкого шума. В этом случае $\kappa_{св}^2 = \kappa_ш^2 = 17$ и, таким образом, $K_{св} = 1$.

При АМ многоканальным сообщением можно принять $\kappa_с^2 = \kappa_ш^2 = 17$, т. е. и $K_с = 1$.

В этом случае соотношение (4.45) перейдет в соотношение

$$(w/W)(1 + \rho)_{дБ} = (1 + \eta)_{дБ}. \tag{4.50}$$

При ЧМ сигнал мало отличается от синусоидального и его пиковая мощность равна $A^2$, а средняя $A^2/2$. Следовательно, можно принять $k_с^2 = 2$. Тогда соотношение (4.45) примет вид

$$(w/W)\left(1 + \frac{\rho}{8{,}5}\right)_{дБ} = (1 + \eta)_{дБ}. \tag{4.51}$$

Величина $w/W$ может быть взята из данных существующих многоканальных радиорелейных систем. Так, в [25] указаны такие значения $w$ и $W$:

| Тип системы | $W$, МГц | $w$, МГц | $w/W$ |
|---|---|---|---|
| Р-60/120 | 6,5 | 24 | 3,7 |
| Р-600 | 8,5 | 35 | 4,1 |
| «Восход» | 14,0 | 40 | 2,8 |

Следует, однако, отметить, что указанные значения $W$ включают и спектральную полосу телевизионного сообщения. Тем не менее возьмем для сравнительных расчетов вышеприведенные ф-лы (4.50) и (4.51) и примем $w/W=4_{(\text{ЧМ})}$ и $w/W=2_{(\text{АМ})}$.

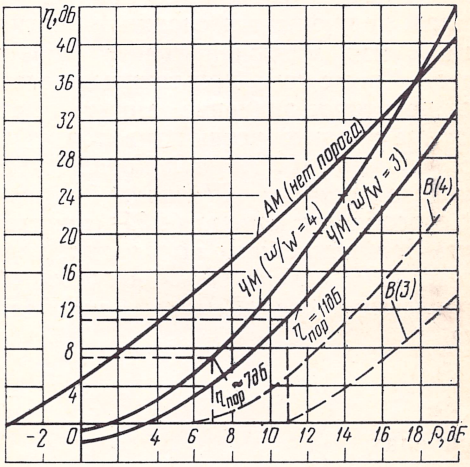


Рис. 4.2

Результаты расчетов представлены кривыми рис. 4.2, там же приведены значения предельных выигрышей $B_{\text{дБ}} = \eta_{\text{дБ}} - \rho_{\text{дБ}}$.

Из рис. 4.2 видно, что в системах с АМ порога не существует, т. е. каково бы ни было значение $\rho$, значение $\eta$ всегда больше или почти равно $\rho$. Следовательно, в этих системах максимальная информация на выходе приемника, равная максимальной информации на входе, достигается всегда при $\eta \geqslant \rho$.

По-другому обстоит дело в системах с ЧМ. Здесь при уменьшении $\rho$, начиная с некоторого значения $\rho_{\text{пор}}$, пре-

дельная информация на выходе равна информации на входе только при $\eta < \rho$. Значение $\eta > \rho$ в этом случае означало бы, что на выходе выделяется полная информация, бóльшая, чем ее поступает на вход.

Величина порога, как это видно из формул и кривых рис. 4.2, зависит только от соотношения полос $w/W$ и от коэффициентов $K_с$ и $K_{св}$, характеризующих статистические свойства сигналов и помех. Для систем с ЧМ при одинаковых статистических свойствах сигналов и помех определяющим порог фактором является лишь отношение $w/W$. В наших расчетах этот порог оказался лежащим в пределах 7—11 дБ. Естественно, что эти значения порога, близко совпадая с наблюдаемыми на практике, не являются очень точными, поскольку невозможно точно учесть закон распределения сообщения (и соответственно сигнала), являющегося сложным сигналом, представляющим сумму многоканального сообщения и телевизионного. Кроме того, при точном расчете в отдельных случаях некоторое значение могут иметь и амплитудно-частотные характеристики трактов.

*Таким образом, в этой главе показано, что, исходя из обобщенного соотношения Шеннона для максимальной пропускной способности канала (4.35), практически можно вычислить два важнейших параметра, характеризующих канал связи: максимально возможный выигрыш системы и значения порога. Выигрыш определяется здесь, как обычно,*

$$B = \frac{P_{св}}{P_{шв}} \Big/ \frac{P_с}{P_ш}$$

или в децибелах

$$B_{дБ} = \left(\frac{P_{св}}{P_{шв}}\right)_{дБ} - \left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_{дБ}.$$

*Он не может быть превзойден при любом методе приема, в том числе и при идеальном.*

*Точность расчета предельной помехоустойчивости и порога может быть принципиально и практически достигнута любая, для чего необходимо лишь знать точные значения законов распределения передаваемого сообщения и помех, что, в отдельных случаях, возможно.*

# ГЛАВА 5. ОЦЕНКА ИСКАЖЕНИЙ ОТ МНОГОЛУЧЕВОСТИ НА ВХОДЕ ПРИЕМНИКА

## 5.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В § 3.4 был изложен один из методов оценки искажений от многолучевости высокочастотного канала передачи. Он свелся к тому, что многолучевый ВЧ канал заменялся эквивалентным низкочастотным четырехполюсником, коэффициент передачи которого, или переходная функция определялись статистическими параметрами многолучевого ВЧ тракта. Метод позволяет вычислять мощность продуктов искажений на выходе приемника. Автором был разработан и другой метод, позволяющий рассчитать отношение мощности продуктов искажений к мощности полезного сигнала на входе приемника [34]. Этот метод и описывается в настоящей главе. В нем игнорируется метод приема, но учитывается способ модуляции и кодирования, поэтому он дает как бы предельные потенциальные возможности выбранной системы передачи информации.

## 5.2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

*Спектр многолучевого сигнала на входе приемника.* Когда на вход приемника поступает сигнал одного луча, то искажений нет. Спектр пришедшего сигнала будет точно соответствовать спектру, излучаемому антенной передатчика. Влияние флуктуационных и других независимых шумов при этом не рассматривается, поскольку методы учета этих шумов известны для многих реальных случаев. Если же на вход приемника попадает несколько сигналов, пришедших по разным лучам, то спектр суммарного сигнала будет отличаться от спектра, излученного антенной передатчика. Найдем выражение для этого спектра при $n$-лучах. Обозначим суммарный сигнал, поступающий на вход приемника через

$$f_{\Sigma}(t) = A_m \sum_{i=1}^{n} \kappa_i f(t + \tau_i), \qquad (5.1)$$

где $A_m$ — амплитуда луча с максимальной интенсивностью; $\kappa_i = A_i/A_m \leqslant 1$ — отношение амплитуды $i$-го луча к максимальной; $\tau_i$ — время запаздывания для $i$-го луча; $f(t+\tau_i)$ — функция, отображающая модулированное колебание. Будем считать, что

$$-1 \leqslant f(t+\tau_i) \leqslant 1. \tag{5.2}$$

Функция $f(t)$ задана, и ее спектр поэтому известен. Обозначим плотность этого спектра через $G(\omega)$.

Найдем выражение для плотности спектра $G_\Sigma(\omega)$ функции $f_\Sigma(t)$ — данной в (5.1). Для этого найдем сначала выражение для корреляционной функции от (5.1) — $K_\Sigma(\tau)$

$$K_\Sigma(\tau) = A_m^2 \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 K_i(\tau) + A_m^2 \sum_{j\neq 1}^{n} \kappa_i \kappa_j K_{ij}(\tau) =$$

$$= A_m^2 \left[ K(\tau) \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j K_{ij}(\tau). \right. \tag{5.3}$$

В этой формуле $K(\tau)$ — корреляционная функция от $f(t)$, а

$$K_{ij}(\tau) = \overline{f(t+\tau_i) f(t+\tau_j+\tau)} = K(\tau+\tau_j-\tau_i). \tag{5.4}$$

Отсюда окончательное выражение для $K_\Sigma(\tau)$ имеет вид

$$K_\Sigma(\tau) = A_m^2 \left[ K(\tau) \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j K(\tau+\tau_j-\tau_i) \right]. \tag{5.5}$$

Зная $K_\Sigma(\tau)$, можно вычислить плотность спектра мощности по формуле

$$G_\Sigma(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} K_\Sigma(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau = A_m^2 \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau +$$

$$+ 2A_m^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau+\tau_j-\tau_i)\, e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{5.6}$$

Но удвоенный интеграл в первом слагаемом в (5.6) есть не что иное, как известная плотность спектра мощности от $f(t)$, т. е. $G(\omega)$.

В интеграле второго слагаемого ф-лы (5.6) производим замену переменных, полагая

$$\tau_1 = \tau + \tau_j - \tau_i$$

тогда легко найдем, что

$$2\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau + \tau_j - \tau_i)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = G(\omega)\, e^{i\omega(\tau_j - \tau_i)} \qquad (5.7)$$

и для $G_\Sigma(\omega)$ по (5.6) получим такое выражение

$$G_\Sigma(\omega) = A_m^2\, G(\omega)\left[\sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i\kappa_j \cos\omega(\tau_j - \tau_i)\right]. \qquad (5.8)$$

Придадим выражению (5.8) другую форму, для чего к выражению в квадратных скобках прибавим и вычтем величину

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i\kappa_j.$$

В результате получим

$$G_\Sigma(\omega) = A_m^2(\omega)\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i\kappa_j \sin^2\frac{2\omega(\tau_j - \tau_i)}{2}\right]. \qquad (5.9)$$

Выражения (5.8) и (5.9) дают точные значения для плотности спектра.

*Оценка относительного значения искажений по входу приемника.* Умножая соотношение (5.9) на $df$ и интегрируя в пределах реальной полосы сигнала, найдем

$$R_\Sigma = PA_m^2\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2 - 2A_m^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i\kappa_j\,[P - K(\tau_j - \tau_i)], \qquad (5.10)$$

где $P = K(0)$ равно средней мощности $f(t)$.

Если в (5.1) все $\tau_i$ одинаковы, т. е. колебания, пришедшие по всем лучам в фазе, то естественно, никаких искажений не будет и мощность всех колебаний определяется первым членом в (5.10). Второй член в (5.10) становится неравным нулю только при условии, что хотя бы один из $n$ лучей дает колебание, отличное по фазе от

остальных. Отсюда следует, что этот член может характеризовать величину мощности продуктов искажений.

Введем обозначения: $P_i = A_m^2 \left( \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \right)^2 P$ — полезная мощность на входе приемника и

$$N_i = 2A_m^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j [P - K(\tau_j - \tau_i)] -$$

мощность продуктов искажений от многолучевости.

Для оценки влияния искажений можно взять величину, равную отношению этих мощностей, т. е.

$$\eta_i = \frac{2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j \left[ 1 - \frac{K(\tau_j - \tau_i)}{K(0)} \right]}{\left( \sum_{i=1}^{n} k_i \right)^2}. \qquad (5.11)$$

Таким образом, зная функцию $f(t)$, которая представляет модулированное колебание на выходе передатчика, мы можем найти корреляционную функцию от $f(t)$ — $K(\tau)$, после чего подсчитать $\eta_i$ для любых совокупностей значений $K_i$ и $\tau_i$.

Так как $0 \leqslant K(\tau_j - \tau_i)/K(0) \leqslant 1$, то максимально возможное относительное значение искажения будет равно

$$\eta_{\text{макс}} = \frac{2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \kappa_i \kappa_j}{\left( \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \right)^2}. \qquad (5.12)$$

*Случай двух лучей.* В исследовательских работах очень часто полагают, что сигнал на приеме состоит только из двух составляющих, прошедших разные пути (двухлучевой сигнал). Положив в этом случае для одного луча $\kappa_i = 1$, $\tau_i = 0$ и для другого луча $\kappa_2 = \kappa$, $\tau_2 = \tau$, что не уменьшает общности, получим из (5.9) и (5.11):

$$G_\Sigma(\omega) = A_m^2 \left[ (1 + \kappa)^2 - 4\kappa \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} \right] G(\omega), \qquad (5.13)$$

$$\eta_1 = \frac{2\kappa \left[ 1 - \frac{K(\tau)}{K(0)} \right]}{(1 + \kappa)^2}. \qquad (5.14)$$

Максимально возможное значение искажений в этом случае будет характеризоваться величиной

$$\eta_{\text{макс}} = \frac{2\kappa}{(1+\kappa)^2}. \tag{5.15}$$

Положив $\kappa=1$, получим из (5.15)

$$\eta_{\text{макс макс}} = 1/2. \tag{5.16}$$

В этом последнем случае спектр будет иметь вид

$$G_{\Sigma}(\omega) = 4A_m^2 G(\omega)\cos^2\frac{\omega\tau}{2}. \tag{5.17}$$

### 5.3. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Предыдущие формулы выведены для фиксированных значений $\kappa_i$ и $\tau_i$. Однако, в реальных условиях эти величины изменяются во времени и являются в каждый момент случайными величинами. Поэтому желательно усреднение $\eta_i$.

Есть все основания считать, что $\kappa_i$ и $\tau_i$, независимые величины, поэтому усреднение можно производить поочередно и раздельно. Усредним сначала по $\tau=\tau_j-\tau_i$. Считаем, что между любыми двумя лучами закон разделения $\tau$ — одинаков, также как одинаков и диапазон изменения $\tau$. Учитывая это, можно из (5.11) получить

$$\overline{\eta_i} = \left[1 - \frac{\overline{K(\tau)}}{K(0)}\right] \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\kappa_i\kappa_j}{\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2} = A\cdot B, \tag{5.18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 - \frac{\overline{K(\tau)}}{K(0)}, \\ B &= \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\kappa_i\kappa_j}{\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Рассмотрим эти сомножители отдельно.

*Исследование сомножителя A.* $K(\tau)$ зависит от вида модулирующего сообщения. Для нас представляет инте-

рес рассмотреть в первую очередь ЧМ сигнал как чаще всего встречающийся. Известно, что для ЧМ

$$K(\tau) = \frac{1}{2} e^{-i\omega_m^2 [K_s(0) - K_s(\tau)]} \cos \omega_0 \tau, \qquad (5.20)$$

где $K_s(\tau)$ есть корреляционная функция от сигнала

$$S(t) = \int_0^t F(t')\, dt',$$

в котором $F(t)$ — модулирующее сообщение, $\Delta\omega_m$ — максимальная девиация частоты (круговая) и $\omega_0$ — несущая угловая частота.

В соответствии с (5.18) и (5.19) будем иметь среднее значение отношения $\overline{K(\tau)}/K(0)$. Однако, учитывая, что $K(\tau)$ — функция периодическая, ее среднее значение за сколь либо заметный промежуток изменения $\tau$ будет близко к нулю. Но искажения будут равноценны при отрицательных и положительных значениях $K(\tau)$. Поэтому для оценки этих искажений следует находить среднеквадратичное значение $\sqrt{\overline{K^2(\tau)}}$. Таким образом необходимо вычислить величину

$$\frac{\sqrt{\overline{K^2(\tau)}}}{K(0)} = \sqrt{e^{-2\Delta\omega_m^2 [K_s(0) - K_s(\tau)]} \cos^2 \omega_0 \tau}. \qquad (5.21)$$

При вычислении мы предположим, что все значения $\tau$ лежат в пределах $-\tau_m \leqslant \tau \leqslant \tau_m$ и распределены равномерно. Это предположение подтверждается экспериментально.

Чтобы вычислить (5.2), необходимо сначала найти $K_s(\tau)$ и $K_s(0) - K_s(\tau)$.

Вычисление (5.2) в общем случае сложно. Рассматривая случай передачи многоканального сообщения, спектр которого в полосе $0 - F_m$ равен $G_0 = \text{const}$ и вне этой полосы $G(F) = 0$ можно найти такое приближенное соотношение для $A$

$$A \approx 1 - \sqrt{\frac{1 - e^{-a\tau_m}}{a\tau_m}}, \qquad (5.22)$$

где $a = \dfrac{2A_0 \Delta f_e^2}{F_m}$ и $A_0 \approx 1{,}4$.

*Исследование сомножителя B.* Выражение (5.19) для этого сомножителя может быть взято также в виде

$$B=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\kappa_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\kappa_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2}, \qquad (5.23)$$

где второй член есть коэффициент когерентности $A_{\text{ког}}$ данный в (3.72).

В этом соотношении $\sum_{i=1}^{n} K_i^2=P_{\text{ср}}$ есть величина пропорциональная мощности пришедшей на приемник по всем лучам при условии некогерентности лучей. Здесь мощности всех лучей складываются.

Величина $\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2$ — равна максимально возможной мощности от всех лучей, когда фазы всех лучей совпадают.

Из (5.23) следует, что всегда $B\leqslant 1$. Пусть все $\kappa_i$ сопоставимы по величине. Такое допущение можно сделать когда суммарное поле, приходящее на приемник, подчиняется необобщенному закону распределения Релея. В первом приближении пусть все $\kappa_i=\kappa$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i^2=n\kappa^2\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\right)^2=n^2\kappa^2$$

Отсюда $B=1-1/n$ и при большом $n$, $B=1$, т. е. имеет максимальную величину.

Представляет интерес рассмотреть случай, когда существенно превалирует один луч. Тогда можно получить такое соотношение для $B$

$$B\approx 1-\frac{1+P_\Sigma}{1+2\sqrt{(n-1)\,P_\Sigma}+(n-1)\,P_\Sigma}, \qquad (5.24)$$

где $P_\Sigma$ — суммарная мощность всех лучей за исключением превалирующего, равная $\kappa_i^2=1$. Из этой формулы легко убедиться, что фактор $B$ зависит не только от $P_\Sigma$, но и от числа лучей. При очень большом числе лучей фактор $B\to 1$ даже при наличии превалирующего луча. Однако, когда $P_\Sigma\ll 1$, тогда $B$ близок к нулю.

Полученные соотношения наглядны и дают возможность оценить степень влияния многолучевости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Бунимович В. И.** Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Советское радио», 1951. 360 с.

2. **Смирнов В. А.** Основы радиосвязи на ультракоротких волнах. М., Связьиздат, 1957. 808 с.

3. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1968—1969. 728 с., 500 с.

4. **Латхи Б. П.** Системы передачи информации. М., «Связь», 1971. 318 с.

5. **Кловский Д. Д.** Теория передачи сигналов. М., «Связь», 1973. 376 с.

6. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1960. 884 с.

7. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966. 678 с.

8. **Рыскин Э. Я.** О пороговом уровне ЧМ приемника. «Электросвязь», 1964, № 6, с. 1—7.

9. **Элинсон Э. С., Ларионов А. С.** О пороговых соотношениях при приеме ЧМ сигналов. — «Радиотехника», 1967, № 2, с. 55—58.

10. **Фрутигер П.** Шум в ЧМ приемниках с отрицательной обратной связью. — «Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике», 1966, № 11, с. 5—21.

11. **Рыскин Э. А., Гусятинский И. А.** Анализ помехозащищенности демодулятора с обратной связью по частоте. — В кн.: Методы помехоустойчивого приема ЧМ и ФМ. Под ред. А. Г. Зюко. М., «Советское радио», 1970, с. 88—96.

12. **Цирлин И. С.** Анализ помехозащищенности ЧМ демодулятора с прямым вычитанием девиации. — В кн.: Методы помехоустойчивого приема ЧМ и ФМ. Под ред. А. Г. Зюко. М., «Советское радио», 1970, с. 155—164.

13. **Марголин Ю. Н.** Помехозащищенность приемника ЧМ сигналов со следящим гетеродином при воздействии флуктуационных шумов. — В кн.: Методы помехоустойчивого приема ЧМ и ФМ. Под ред. А. Г. Зюко. М., «Советское радио», 1970, с. 165—176.

14. **Рыскин Э. Я.** К вопросу о пороговом уровне ЧМ приемника. — «Электросвязь», 1969, № 1, с. 79.

15. **Rice S. O.** Statistical properties of sine wave plus random noise. — «Bell System Techn. Jornal», 1948, V27, № 1, p. 109—157.

16. **Rice S. O.** Noise in FM Receivers, Ch. 25 in «Time Series Analysis», edited by Rosenblatt John Wiley, 1963, ... p. ...

17. **Пугачев В. С.** Введение в теорию вероятностей. М., «Наука», 1968. 368 с.

18. **Лифшиц В. А., Пугачев В. Н.** Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963. 896 с.

19. **Зюко А. Г.** Элементы теории передачи информации. Киев, «Техника», 1969. 298 с.

20. **Большаков А.** и др. Математические основы современной радиоэлектроники. М., «Советское радио», 1968. 206 с.

21. **Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И.** Введение в теорию сигналов и цепей. М., «Высшая школа», 1968. 280 с.

22. **Деч Р.** Нелинейные преобразования случайных процессов. М., «Советское радио», 1965. 207 с.

23. **Смирнов В. А.** Влияние флуктуационных помех в системах связи с частотной модуляцией. — «Радиотехника», 1958, № 9, с. 8—17.

24. **Гусятинский И. А., Рыжков Е. В., Немировский А. С.** Радиорелейные линии связи. М., «Связь», 1965. 543 с.

25. **Инженерно**-технический справочник по электросвязи. Радиорелейные линии. М., «Связь», 1971. 440 с.

26. **Малолепший Г. А.** К вопросу о помехоустойчивости частотной модуляции. — В кн.: Методы помехоустойчивого приема ЧМ и ФМ. Под ред. А. Г. Зюко. М., «Советское радио», 1970, с. 12—29.

27. **Kretzmer E. R.** An Application of Auto-Correlation Analysis. — «Journ. of Mathematics and Physics», 1950, № 3, p. 75—92.

28. **Раис С.** Теория флуктуационных шумов. — В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Под ред. Н. А. Железнова. М., ИИЛ, 1953, с. 88—239.

29. **Смирнов В. А.** Применение нулевого отклонения для оценки шумов и искажений. — «Электросвязь», 1961, № 1, с. 3—8.

30. **Смирнов В. А.** Новые методы оценки искажений при многолучевом распространении сигналов. — «Электросвязь», 1961, № 5, с. 10—17.

31. **Котельников В. А.** Теория потенциальной помехоустойчивости М., Госэнергоиздат, 1956. 151 с.

32. **Гельфанд И. М., Фомин С. В.** Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961. 228 с.

33. **Шэннон К.** Статистическая теория передачи электрических сигналов. — В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Под ред. Н. А. Железнова. М., ИИЛ, 1953, с. 7—87.

34. **Смирнов В. А.** Новые методы оценки искажений при многолучевом распространении сигналов. — «Электросвязь», 1961, № 5, с. 10—17.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Стр.

Предисловие . . . . . 3

Глава 1. **Представления сигналов и помех, поступающих на вход приемника** . . . . . 5

1.1. Общие сведения о сигналах и помехах . . . . . 5
1.2. Канонические (оптимальные) представления сигналов и помех . . . . . 7
1.3. Представление сигналов рядом ортогональных функций. Теорема Котельникова . . . . . 10
1.4. Представление сигнала аналитической функцией . . 13
1.5. Представление модулированных сигналов . . . . . 16
1.6. Представление смеси модулированного синусоидального сигнала и шума на входе приемника . . . . . 17

Глава 2. **Метод вероятностных весов** . . . . . 19

2.1. Сущность метода . . . . . 19
2.2. Влияние флуктуационных помех в системе с ЧМ . . 22
2.3. Влияние флуктуационных помех в системе с АМ . 36
2.4. Применение «метода вероятностных весов» к оценке помехоустойчивости импульсных систем связи . . . 41

Глава 3. **Определение предельной помехоустойчивости по методу нулевого отклонения** . . . . . 49

3.1. Обоснование условия нулевого отклонения . . . . 49
3.2. Малые флуктуационные шумы . . . . . 51
3.3. Большие флуктуационные шумы . . . . . 52
3.4. Оценка искажений при многолучевом приеме . . . 59

Глава 4. **Определение предельной помехоустойчивости и порога из обобщенного уравнения Шеннона** . . 69

4.1. Некоторые сведения из теории информации . . . . 69
4.2. Выражение объема информации через основные параметры сообщения . . . . . 76
4.3. Канал и его пропускная способность . . . . . 79
4.4. Определение предельной помехоустойчивости и порога 82

Глава 5. **Оценка искажений от многолучевости на входе приемника** . . . . . 87

5.1. Общие положения . . . . . 87
5.2. Основные соотношения . . . . . 87
5.3. Среднее значение . . . . . 91
Список литературы . . . . . 94

42 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»